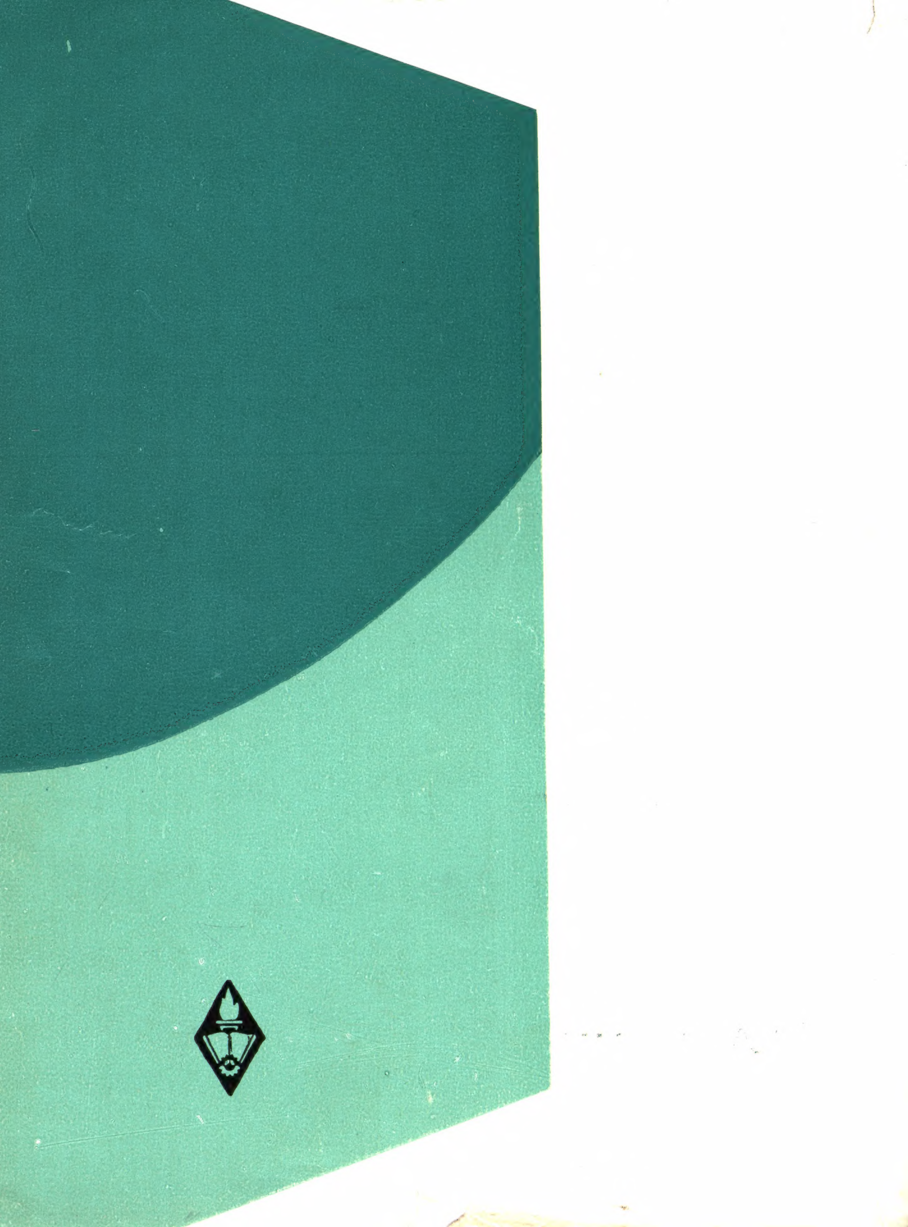

Р. Я. ШОСТАК
ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ



Р. Я. ШОСТАК

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

(КРАТКИЙ КУРС)

Допущено Министерством
высшего и среднего специального
образования СССР
в качестве учебного пособия для втузов

Издание второе



ИЗДАТЕЛЬСТВО
«ВЫСШАЯ ШКОЛА»
МОСКВА 1972

517.2
Ш.78
УДК 519.47

Р. Я. Шостак

Ш.78 Операционное исчисление. Краткий курс. Изд. второе, доп. Учебное пособие для втузов. М. «Высшая школа», 1972.

280 с. с илл.

Книга в краткой форме излагает основы операционного исчисления и его применения к интегрированию линейных дифференциальных уравнений и систем таких уравнений. Кроме того, в книге дается понятие об импульсных функциях и их применениях. Даны методы решения задач, приводящих к дифференциальным уравнениям с кусочно-аналитическими и периодическими функциями в правой части.

В книге содержится достаточное количество примеров, иллюстрирующих теорию, приведены типовые задачи с подробными решениями. Каждая глава снабжена упражнениями для самостоятельной работы студентов.

Рецензент: кафедра высшей математики МИРЭА.

2—2—3 517.2
43—71

Предисловие

Настоящее пособие предназначено для студентов старших курсов и аспирантов втузов, а также для инженерно-технических работников, не изучавших ранее операционное исчисление и желающих познакомиться с его основами.

Автор предполагает, что читатель знаком с основами математического анализа в объеме обычного втузовского курса, а также элементами теории функций комплексного переменного (примерно в объеме гл. I, ч. II, т. III курса «Высшей математики» В. И. Смирнова). Некоторые дополнительные сведения по математическому анализу и теории функций комплексного переменного, не содержащиеся в обычных курсах анализа для втузов, но на которые автор вынужден опираться при изложении операционного исчисления, приведены (частично с выводами, частично без выводов) во введении.

В первой и четвертой главах приведены доказательства теоремы обращения и третьей (обобщенной) теоремы разложения, которые являются более трудными для усвоения, чем остальной содержащийся в этой книге материал; читатель, не интересующийся этими доказательствами, может их опустить вообще, а тот, кто желает возможно быстрее перейти к практическим применениям, может эти доказательства опустить при первом чтении.

Во всей книге принята следующая нумерация формул: первое число в обозначении формулы указывает

главу, второе — параграф этой главы, третье — порядковый номер формулы в этом параграфе. Так, формула (2; 3; 5) — это 5-я формула § 3, гл. второй.

Автор приносит глубокую благодарность всем, кто познакомился с рукописью книги, за ценные советы, учтенные им при доработке рукописи: профессорам П. М. Ризу и Г. Л. Лунцу, доцентам С. В. Фролову, Е. Н. Мирославлеву, К. К. Гахария и ст. преподавателю М. И. Ершовой (последнюю также и за ряд предоставленных автору и использованных им в книге задач).

Автор также заранее благодарит всех, кто по выходе книги в свет укажет на замеченные в ней недочеты и тем поможет устранению их в дальнейшем.

ВВЕДЕНИЕ

НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ, ФОРМУЛЫ И ТЕОРЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ОПЕРАЦИОННОМ ИСЧИСЛЕНИИ

§ 1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами; абсолютная сходимость; равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра

Несобственными интегралами с бесконечными пределами называются интегралы вида

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.^*$$

(Функция $f(x)$ предполагается непрерывной на всем интервале интегрирования.)

Интеграл $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ определяется следующим образом:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_a^{N} f(x)\,dx. \qquad (0;\ 1;\ 1)$$

Если этот предел существует при произвольном способе стремления N к бесконечности и конечен, интеграл назы-

* Здесь и всюду дальше в книге, где это касается вещественного аргумента, под символом «∞» следует понимать «$+\infty$».

вается *сходящимся*; если этот предел не существует или бесконечен, интеграл называется *расходящимся*.

Необходимый и достаточный признак сходимости такого интеграла следующий. *Для всякого малого* $\varepsilon>0$ *существует такое число* $N(\varepsilon)>0$, *что при любых* $A_2>A_1\geqslant N(\varepsilon)$ *справедливо неравенство*

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right|<\varepsilon. \tag{0; 1; 2}$$

Интегралы $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ определяются аналогично

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx=\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{b} f(x)\,dx, \tag{0; 1; 3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\lim_{\substack{N_1\to\infty\\ N_2\to\infty}}\int_{-N_1}^{N_2} f(x)\,dx \tag{0; 1; 4}$$

(пределы N_1 и N_2 стремятся к бесконечности независимо друг от друга).

Интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\int\limits_{a}^{\infty}|f(x)|\,dx$.

Необходимый и достаточный признак абсолютной сходимости

При всяком $\varepsilon > 0$

$$\int_{A_1}^{A_2} |f(x)|\,dx < \varepsilon, \qquad (0;\ 1;\ 5)$$

если $A_2 > A_1 > N(\varepsilon) > 0$.

Только достаточные признаки абсолютной сходимости

а) *Интеграл* $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ *сходится абсолютно, если* *при* $x > N \geqslant a$, $|f(x)| < \varphi(x)$ *и* $\int_N^{\infty} \varphi(x)\,dx$ *сходится.*

б) *Интеграл* $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ *сходится абсолютно, если*

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{|f(x)|}{\varphi(x)} = c > 0$ и $\int_a^{\infty} \varphi(x)\,dx$ *сходится.*

(В обоих случаях, естественно, $\varphi(x)$ — положительная на интервале интегрирования функция.)

Несобственный интеграл, зависящий от параметра, $I(\alpha) = \int_a^{\infty} f(x, \alpha)\,dx$ называется *равномерно-сходящимся* на отрезке $[\alpha_1, \alpha_2]$ изменения параметра α, если при всяком малом $\varepsilon > 0$ и любом $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ справедливо неравенство

$$\left|\int_a^\infty f(x, \alpha)\,dx - \int_a^A f(x, \alpha)\,dx\right| = \left|\int_A^\infty f(x, \alpha)\,dx\right| < \varepsilon$$

$$\text{при } A > N(\varepsilon) > 0 \qquad (0;\ 1;\ 6)$$

(N зависит только от ε и не зависит от α).

Определение распространяется и на те случаи, когда $\alpha_2 = \infty$ или $\alpha_1 = -\infty$ или одновременно $\alpha_2 = \infty$, $\alpha_1 = -\infty$.

Необходимый и достаточный признак равномерной сходимости

Интеграл $\int_a^\infty f(x, \alpha)\,dx$ *сходится равномерно на отрезке* $[\alpha_1, \alpha_2]$, *если при всяком малом* $\varepsilon > 0$, любом $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ *и любых* $A_2 > A_1 > N(\varepsilon) > 0$ *справедливо неравенство*

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x, \alpha)\,dx\right| < \varepsilon \qquad (0;\ 1;\ 6^*)$$

(N зависит только от ε и не зависит от α).

Достаточный признак равномерной сходимости

Интеграл $\int_a^\infty f(x, \alpha)\,dx$ *сходится равномерно на отрезке* $[\alpha_1, \alpha_2]$, *если при любом* $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ *и* $x > N \geqslant a_1$ $|f(x, \alpha)| < \varphi(x)$, *и интеграл* $\int_N^\infty \varphi(x)\,dx$ *сходится.*

Свойства равномерно-сходящихся интегралов

1. *Если* $f(x, \alpha)$ — *непрерывная функция своих аргументов* x *и* α *для значений* $x \geqslant a$ *и* $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ *и интеграл* $I(\alpha) = \int\limits_a^\infty f(x, \alpha)\,dx$ *сходится на отрезке* $[\alpha_1, \alpha_2]$ *равномерно, то интеграл* $I(\alpha)$ — *непрерывная функция параметра* α *на этом отрезке.*

2. *При выполнении условий свойства 1 интеграл* $I(\alpha)$ *можно интегрировать по параметру* α *на отрезке* $[\alpha_1, \alpha_2]$ *под знаком интеграла:*

$$\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \int\limits_a^\infty f(x, \alpha)\,dx = \int\limits_a^\infty dx \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x, \alpha)\,d\alpha \qquad (0;\ 1;\ 7)$$

(если $\alpha_2 = \infty$ или $\alpha_1 = -\infty$ — требуется сходимость одного из этих интегралов, при этом второй также будет сходиться и будет равен первому).

3. *Если на отрезке* $[\alpha_1, \alpha_2]$ $f(x, \alpha)$ — *дифференцируемая функция параметра* α, *а производная* $f'_\alpha(x, \alpha)$ — *непрерывная функция аргументов* x *и* α, *когда* $x \geqslant a$ *и* $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$, *интеграл* $\int\limits_a^\infty f(x, \alpha)\,dx$ *сходится на отрезке* $[\alpha_1, \alpha_2]$ *и интеграл* $I_1(\alpha) = \int\limits_a^\infty f'_\alpha(x, \alpha)\,dx$ *сходится на этом отрезке равномерно, то интеграл* $I(\alpha)$ *можно дифференцировать по* α *на этом отрезке под знаком интеграла:*

$$I'(\alpha)=\frac{d}{d\alpha}\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx=\int_a^\infty f'_\alpha(x,\alpha)\,dx. \qquad (0;\ 1;\ 8)$$

§ 2. Интегралы, зависящие от комплексного параметра

В операционном исчислении широко используются некоторые свойства интегралов по вещественному аргументу, зависящих от комплексного параметра. Сформулируем и докажем две основные теоремы, описывающие эти свойства.

Теорема 1. *Пусть $f(t, z)$ — непрерывная функция двух переменных t и z, причем вещественное переменное t изменяется на отрезке $[a, b]$, а комплексное переменное z — в замкнутой области D, ограниченной контуром L. Если для рассматриваемых значений t и z $f(t, z)$ — регулярная функция от z, то интеграл*

$$I(z)=\int_a^b f(t,z)\,dt \qquad (0;\ 2;\ 1)$$

будет также регулярной функцией от z внутри области D и производная $I'(z)$ будет определяться формулой

$$I'(z)=\int_a^b f'_z(t,z)\,dt. \qquad (0;\ 2;\ 2)$$

Доказательство. Запишем функцию $f(t, z)$ при помощи интеграла Коши (что возможно, поскольку $f(t, z)$ в области D и на контуре L — регулярная функ-

ция от z):

$$f(t, z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(t,\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}\,.^{*}$$

В силу этого имеем следующее равенство:

$$I(z)=\int_a^b \left\{\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(t,\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}\right\}dt=\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{\int_a^b f(t,\zeta)\,dt}{\zeta-z}\,d\zeta$$

(мы изменили порядок интегрирования, что законно, поскольку функция $f(t, \zeta)$ — непрерывная функция обоих аргументов).

Последнее равенство показывает, что функция $I(z)$ представима интегралом типа Коши и, следовательно, является регулярной функцией от z внутри области D. Ее производная по z поэтому определяется по формуле

$$I'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{\int_a^b f(t,\zeta)\,dt}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta,$$

откуда, снова меняя порядок интегрирования, находим

$$I'(z)=\int_a^b \left\{\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(t,\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^2}\right\}dt.$$

Выражение в фигурных скобках под знаком интеграла в правой части последней формулы определяет $f_z'(t, z)$ и

* Здесь и в дальнейшем символом $\oint_L f(z)\,dz$ обозначен интеграл по контуру L, взятый в положительном направлении.

поэтому

$$I'(z)=\int_a^b f'_z(t,\ z)\,dt$$

— этим теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть все условия предыдущей теоремы выполнены не при* $t \in [a, b]$, *а при* $t \geqslant a$, *и пусть, кроме того,* $\int_a^\infty f(t,\ z)\,dt$ *сходится равномерно, когда* z *принадлежит замкнутой области* D. *Тогда интеграл* $I(z)=\int_a^\infty f(t,\ z)\,dt$ *будет внутри области* D *регулярной функцией* z, *причем дифференцирование по* z *можно и в этом случае производить под знаком интеграла:*

$$I(z)=\int_a^\infty f'_z(t,\ z)\,dt. \qquad (0;\ 2;\ 3)$$

Доказательство. Для доказательства возьмем произвольную возрастающую бесконечную последовательность чисел $a=a_0<a_1<a_2<\ldots<a_n<\ldots$, где $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$, и рассмотрим функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z), \qquad (0;\ 2;\ 4)$$

где

$$u_n(z)=\int_{a_{n-1}}^{a_n} f(t,\ z)\,dt. \qquad (0;\ 2;\ 5)$$

В силу теоремы 1 члены этого ряда — регулярные в области D функции, производные которых внутри области D определяются по формуле

$$u'_n(z) = \int_{a_{n-1}}^{a_n} f'_z(t, z)\,dt. \qquad (0;\ 2;\ 6)$$

Сумма ряда (0; 2; 4) равна

$$\int_a^\infty f(t, z)\,dt = f(z),$$

так как

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{k=n} u_k(z) = \int_a^{a_n} f(t, z)\,dt,$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(z) = \lim_{n\to\infty} \int_a^{a_n} f(t, z)\,dt = \int_a^\infty f(t, z)\,dt$$

и ряд этот сходится в замкнутой области D равномерно (в силу равномерной сходимости $\int_a^\infty f(t, z)\,dt$). Но тогда, по теореме Вейерштрасса о равномерно сходящихся рядах, построенных из регулярных функций, сумма этого ряда $I(z)$ будет регулярной функцией от z внутри области D. Этот ряд можно будет внутри области D почленно дифференцировать и полученный после дифференцирования ряд будет также внутри области D равномерно сходящимся. Для ряда производных имеем

$$S^*_n(z) = \sum_{k=1}^{k=n} u'_k(z) = \int_a^{a_n} f'_z(t, z)\,dt,$$

$$S^*(z)=\lim_{n\to\infty} S_n^*(z)=\lim_{n\to\infty}\int_a^{a_n} f'_z(t,\ z)\,dt=\int_a^{\infty} f'_z(t,\ z)\,dt.$$

Следовательно, в силу теоремы Вейерштрасса находим окончательно

$$S^*(z)=I'(z),$$

или

$$\frac{d}{dz}\int_a^{\infty} f(t,\ z)\,dt=\int_a^{\infty} f'_z(t,\ z)\,dt. \qquad (0;\ 2;\ 7)$$

Теорема доказана. Подчеркнем, что в силу этой теоремы при выполнении ее условий интеграл в правой части формулы (0; 2; 7) всегда сходится.

§ 3. Эйлеров интеграл второго рода — функция $\Gamma(z)$

Функция комплексного переменного $\Gamma(z)$ определяется для значений, удовлетворяющих условию $\text{Re}(z)>0$ следующим равенством:

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty} e^{-x}x^{z-1}dx. \qquad (0;\ 3;\ 1)$$

Этот интеграл называется *интегралом Эйлера второго рода.* Для значений комплексного параметра z, определяемых неравенствами

$$0<\varepsilon\leqslant \text{Re}(z)\leqslant N<\infty, \qquad (0;\ 3;\ 2)$$

этот несобственный интеграл удовлетворяет условиям теорем 1 и 2 предыдущего параграфа (доказательство этого утверждения читатель может найти в курсе «Выс-

шей математики» В. И. Смирнова, т. III, ч. II, гл. III, § 71). Поэтому Эйлерова функция $\Gamma(z)$ — регулярная функция комплексного переменного z в правой полуплоскости и ее производная определяется формулой

$$\Gamma'(z)=\int_0^\infty e^{-x}x^{z-1}\ln x\,dx, \qquad (0;\ 3;\ 3)$$

получаемой дифференцированием равенства (0; 3; 1) под знаком интеграла; при $z=1$

$$\Gamma'(1)=\int_0^\infty e^{-x}\ln x\,dx=-\gamma, \qquad (0;\ 3;\ 4)$$

где $\gamma=0{,}5772157...$ — *постоянная Эйлера.*

Приведем без вывода некоторые важнейшие свойства функции $\Gamma(z)$ (вывод их читатель найдет в уже упомянутой книге В. И. Смирнова):

1. $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$. (0; 3; 5)
2. $\Gamma(n+1)=n!$ (n — целое положительное число). (0; 3; 6)
3. $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\sin\pi z}$. (0; 3; 7)

Из этих формул, в частности, следует, что

$$\Gamma(1)=\Gamma(2)=1;\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

4. В точке $z=0$ функция $\Gamma(z)$ имеет простой полюс. Аналитическое продолжение функции $\Gamma(z)$ в левую полуплоскость дает функцию, регулярную на всей плоскости комплексного переменного за исключением точек $z=0$, $z=-1$, $z=-2$, ..., $z=-n$, ..., лежащих на отрица-

тельной части вещественной оси, в которых $\Gamma(z)$ имеет простые полюсы. Формулы (0; 3; 5) и (0; 3; 7) верны и в левой полуплоскости.

5. Формула (0; 3; 1) остается верной, если x — комплексное переменное, а интегрирование по x производится по произвольному, уходящему на бесконечность пути, на котором $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{Re}(x) = +\infty$.

§ 4. Интеграл Фурье

Из курса математического анализа известно, что всякая функция $f(t)$, которая на отрезке $[-l, l]$ удовлетворяет условиям Дирихле, а именно:

а) ограничена на этом отрезке;

б) кусочно-непрерывна на нем (имеет лишь конечное число точек разрыва непрерывности первого рода *);

в) кусочно-монотонна (в частности, имеет лишь конечное число экстремумов) — может быть на этом отрезке представлена сходящимся к ней тригонометрическим рядом

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi t}{l} + b_k \sin\frac{k\pi t}{l}\right). \quad (0;\ 4;\ 1)$$

---

* Точкой неустранимого разрыва первого рода называется такая точка t_0, в которой у функции существуют конечные, но не равные друг другу, односторонние пределы:

$$f(t_0-0) = \lim_{t\to t_0-0} f(t), \quad f(t_0+0) = \lim_{t\to t_0+0} f(t), \quad f(t_0-0) \neq f(t_0+0).$$

Разрыв первого рода называется устранимым, если в точке разрыва выполняются условия: $f(t_0+0) = f(t_0-0) \neq f(t_0)$.

Коэффициенты ряда a_k и b_k определяются при этом по формулам Эйлера — Фурье

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\tau)\cos\frac{k\pi\tau}{l}\,d\tau \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots), \\ b_k &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\tau)\sin\frac{k\pi\tau}{l}\,d\tau \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ldots). \end{aligned}\right\} \quad (0;\ 4;\ 2)$$

Напомним, что в силу теоремы Дирихле сумма ряда (0; 4; 1) в точке t_0 разрыва непрерывности функции $f(t)$ равна полусумме ее предельных значений слева и справа от точки разрыва

$$\frac{1}{2}\{f(t_0-0)+f(t_0+0)\}.$$

Ряд в правой части равенства (0; 4; 1) можно записать в иной форме; внесем в него из формул (0; 4; 2) значения коэффициентов a_k и b_k, подведем под знаки интегралов $\cos\frac{k\pi t}{l}$ и $\sin\frac{k\pi t}{l}$ (что возможно, поскольку переменная интегрирования обозначена буквой τ) и используем формулу тригонометрии для косинуса суммы:

$$f(t)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\tau)\,d\tau+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\tau)\cos\frac{k\pi(t-\tau)}{l}\,d\tau. \qquad (0;\ 4;\ 3)$$

Если функция $f(t)$ первоначально была определена на интервале числовой оси, большем, чем отрезок $[-l, l]$ (например, на всей числовой оси), то разложения (0; 4; 1) и (0; 4; 3) воспроизводят значения этой функции только в промежутке $(-l, l)$, продолжая ее на всю остальную числовую ось как *периодическую функцию с пе-*

риодом 2l. Поэтому, если функция определена на всей числовой оси, в формулах (0; 4; 1) или (0; 4; 3) можно попытаться перейти к пределу при $l \to \infty$. Этот переход к пределу сделан может быть только при выполнении двух условий: 1. Функция $f(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле на любом конечном отрезке оси ot. 2. Функция $f(t)$ абсолютно интегрируема вдоль числовой оси, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt = A < \infty. \qquad (0;\ 4;\ 4)$$

При выполнении условия (0; 4; 4) первый член правой части равенства (0; 4; 3) при $l \to \infty$ стремится к нулю. В самом деле,

$$\frac{1}{2l}\left|\int_{-l}^{l} f(\tau)\, dt\right| \leqslant \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} |f(\tau)|\, d\tau < \frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\tau)|\, d\tau = \frac{A}{2l},$$

это и показывает, что при $l \to \infty$, $\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\tau)\, d\tau \to 0.$

Второй член правой части равенства (0; 4; 3) преобразуем.

Введем обозначение $F_l(\xi,\ t) = \int_{-l}^{l} f(\tau)\cos\xi(t-\tau)\, d\tau.$

Тогда, полагая $\xi_k = \frac{k\pi}{l}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, имеем

$$F_l(\xi_k,\ t) = \int_{-l}^{l} f(\tau)\cos\frac{k\pi(t-\tau)}{l}\, d\tau,$$

$$\Delta\xi_k = \xi_{k+1} - \xi_k = \frac{\pi}{l}\ ,\ \text{откуда}\ \frac{1}{l} = \frac{\Delta\xi_k}{\pi}\ .$$

Используя эти обозначения, находим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\tau)\cos\frac{k\pi(t-\tau)}{l}\,d\tau=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}F_l(\xi_k,\ t)\,\Delta\xi_k; \qquad (0;\ 4;\ 5)$$

при $l\to\infty$ имеем $\Delta\xi_k=\frac{\pi}{l}\to 0$;

$$F_l(\xi,\ t)\to\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\xi(t-\tau)\,d\tau.$$

Что касается суммы в правой части равенства (0; 4; 5), которая по структуре аналогична интегральной сумме, то можно ожидать, что при $l\to\infty$ и $\Delta\xi_k\to 0$ эта сумма обратится в интеграл

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}F_l(\xi_k,\ t)\,\Delta\xi_k\to\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\lim_{l\to\infty}F_l(\xi,\ t)\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\xi\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\xi(t-\tau)\,d\tau. \qquad (0;\ 4;\ 6)$$

Это нестрогое заключение позволяет ожидать, что если функция $f(t)$ удовлетворяет оговоренным выше условиям, то для нее будет справедливо равенство

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\xi\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\xi(t-\tau)\,d\tau. \qquad (0;\ 4;\ 7)$$

При этом во всякой точке $t=t_0$, являющейся точкой разрыва непрерывности первого рода функции $f(t)$, значе-

ние интеграла, стоящего в правой части формулы (0; 4; 7), в силу теоремы Дирихле будет равно не $f(t_0)$*,

а $\frac{1}{2}\{f(t_0-0)+f(t_0+0)\}$.

Для обоснования равенства (0; 4; 7) рассмотрим интеграл

$$I(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_0^\alpha d\xi\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\xi(t-\tau)\,d\tau.$$

В силу абсолютной интегрируемости функции $f(t)$ в этом интеграле можно изменить порядок интегрирования, после чего внутреннее интегрирование выполняется без труда:

$$I(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,d\tau\int_0^\alpha \cos\xi\,(t-\tau)\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,\frac{\sin\alpha\,(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau.$$

В последнем интеграле положим $\alpha(t-\tau)=-u$. Интеграл преобразуется к виду

$$I(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t+\frac{u}{\alpha}\right)\frac{\sin u}{u}\,du.$$

---

* Впрочем значение $f(t)$ в самой точке разрыва непрерывности $t=t_0$ может быть и не определено.

Разобьем полученный интеграл на два (от $-\infty$ до нуля и от нуля до $+\infty$) и в первом из них заменим u на $-u$:

$$I(\alpha)=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\infty}^{0} f\left(t+\frac{u}{\alpha}\right)\frac{\sin u}{u}\,du+\right.$$

$$\left.+\int_{0}^{\infty} f\left(t+\frac{u}{\alpha}\right)\frac{\sin u}{u}\,du\right\}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left\{f\left(t-\frac{u}{\alpha}\right)+\right.$$

$$\left.+f\left(t+\frac{u}{\alpha}\right)\right\}\frac{\sin u}{u}\,du.$$

Устремим α к бесконечности:

$$\lim_{\alpha\to\infty} I(\alpha)=\frac{1}{\pi}\lim_{\alpha\to\infty}\int_{0}^{\infty}\left\{f\left(t-\frac{u}{\alpha}\right)+f\left(t+\frac{u}{\alpha}\right)\right\}\frac{\sin u}{u}\,du.$$

Можно строго доказать, что в данном случае возможен переход к пределу под знаком интеграла, в силу чего предыдущее равенство примет вид

$$\lim_{\alpha\to\infty} I(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\lim_{\alpha\to\infty}\left\{f\left(t-\frac{u}{\alpha}\right)+f\left(t+\frac{u}{\alpha}\right)\right\}\frac{\sin u}{u}\,du=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\{f(t-0)+f(t+0)\}\frac{\sin u}{u}\,du=$$

$$=\frac{f(t-0)+f(t+0)}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin u}{u}\,du.$$

Но $\int\limits_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du = \frac{\pi}{2}$. Поэтому находим окончательно

$$\lim_{\alpha\to\infty} I(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\xi(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{f(t-0)+f(t+0)}{2}. \qquad (0;\ 4;\ 8)$$

(В точках непрерывности функции $f(t)$ правая часть обращается в $f(t)$.)

Тем самым доказана справедливость формулы (0; 4; 7). Эта формула называется *интегральной формулой Фурье,* а стоящий в ее правой части интеграл — *интегралом Фурье.* Интеграл Фурье можно преобразовать к другим формам:

а) так как $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\xi(t-\tau)\,d\tau$ является четной функцией аргумента ξ, то

$$\int\limits_0^{+\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\xi(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\xi(t-\tau)\,d\tau.$$

Поэтому интеграл Фурье можно записать так:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\xi(t-\tau)\,d\tau; \qquad (0;\ 4;\ 9)$$

б) так как $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\sin\xi(t-\tau)\,d\tau$ является нечетной функцией аргумента ξ, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\sin\xi(t-\tau)\,d\tau=0.$$

Запишем равенство

$$0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\sin\xi(t-\tau)\,d\tau$$

и, умножив его на мнимую единицу i, прибавим почленно к равенству (0; 4; 9); найдем

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\{\cos\xi(t-\tau)+i\sin\xi(t-\tau)\}\,d\tau,$$

или в силу формулы Эйлера ($e^{ix}=\cos x+i\sin x$) находим

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi t}d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi\tau} f(\tau)\,d\tau. \qquad (0;\ 4;\ 10)$$

Это — интеграл Фурье в комплексной форме.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Преобразование интеграла Фурье

В операционном исчислении рассматривается класс функций (их называют «изображаемыми по Лапласу», просто «изображаемыми» или «оригиналами»), которые удовлетворяют следующим трем условиям.

1. При отрицательных значениях аргумента соответствующая функция тождественно равна нулю, т. е.

$$f(t) \equiv 0 \text{ при } t < 0.$$

2. При положительных значениях аргумента порядок роста абсолютных значений функций при возрастании аргумента не превосходит порядка роста некоторой показательной функции

$$|f(t)| \leqslant Me^{\sigma_0 t} \text{ при } t > 0.$$

(Здесь M и σ_0 постоянные, $M>0$, $\sigma_0 \lesseqgtr 0$.)

3. На любом конечном отрезке положительной полуоси $0t$ функция $f(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле.

Примечание. Выбор этих условий связан с рядом причин.

1. В класс рассматриваемых функций должны попасть все функции, получаемые в качестве частных решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, в правой части которых стоят функции того же класса при произвольных начальных условиях, заданных для некоторого начального значения аргумента, за которое всегда можно принять значение

$t=0$; это позволяет наложить условие 1, поскольку поведение искомого решения нужно знать лишь для значений аргумента, больших (более поздних) начального, а также и второе, поскольку для решений линейных дифференциальных уравнений рассматриваемого вида оно всегда будет выполнено автоматически.

2. Ко всем функциям рассматриваемого класса нужно иметь возможность применять преобразованный интеграл Фурье. Это, при выполнении условия 2, снова требует наложения условия 1 (чтобы функция $\varphi(t) = e^{-\sigma t} f(t)$, где $\sigma > \sigma_0$, при всяком σ_0 была абсолютно интегрируема вдоль всей оси ot, включая ее отрицательную часть) и условия 3.

К функции $f(t)$, удовлетворяющей трем перечисленным условиям, нельзя применить формулу Фурье (0; 4; 10), поскольку эта функция не является абсолютно интегрируемой вдоль всей оси $0t$. Но если ввести вспомогательную функцию $\varphi(t)$, положив

$$\varphi(t) = e^{-\sigma t} f(t), \qquad (1;\ 1;\ 1)$$

где $\sigma \geqslant \sigma_1 > \sigma_0$, то эта функция $\varphi(t)$ будет абсолютно интегрируемой вдоль всей оси $0t$ и, следовательно, к ней можно применить формулу (0; 4; 10). В самом деле,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)| dt = \int_{0}^{\infty} |\varphi(t)| dt$$

(так как $\varphi(t) \equiv 0$ при $t<0$).

Используя условие 2, находим далее

$$\int_{0}^{\infty} |\varphi(t)| dt = \int_{0}^{\infty} e^{-\sigma t} |f(t)| dt \leqslant$$

$$\leqslant M \int_{0}^{\infty} e^{-\sigma t} e^{\sigma_0 t} dt = \frac{M}{\sigma - \sigma_0}, \qquad (1;\ 1;\ 2)$$

что и доказывает абсолютную интегрируемость функции $\varphi(t)$. Поэтому по формуле (0; 4; 10) имеем

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi t} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi\tau} \varphi(\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi t}\, d\xi \int_{0}^{\infty} e^{-i\xi\tau} \varphi(\tau)\, d\tau$$

(поскольку $\varphi(t) \equiv 0$ при $t < 0$).

Заменяя в этом равенстве функцию $\varphi(t)$ ее выражением из равенства (1; 1; 1) и умножая левую и правую части на $e^{\sigma t}$, приходим к следующему равенству для исходной функции

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} e^{\sigma t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi t}\, d\xi \int_{0}^{\infty} e^{-i\xi\tau} e^{-\sigma\tau} f(\tau)\, d\tau.$$

Подведем множитель $e^{\sigma t}$ под знак внешнего интеграла (поскольку он не зависит от переменных интегрирования ξ и τ):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\sigma + i\xi)\, t} d\xi \int_{0}^{\infty} e^{-(\sigma + i\xi)\, \tau} f(\tau)\, d\tau.$$

Наконец, положим $\sigma + i\xi = s$; когда σ остается постоянным, а ξ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, s изменяется от $\sigma - i\infty$ до $\sigma + i\infty$, пробегая в комплексной плоскости s прямую $\mathrm{Re}(s) = \sigma$, параллельную мнимой оси. Так как на этой прямой $ds = i d\xi$, то при такой замене предыду-

щая формула принимает окончательный вид

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st}ds\int\limits_{0}^{\infty} e^{-s\tau}f(\tau)\,d\tau \text{ —} \qquad (1;\ 1;\ 3)$$

это преобразованный интеграл Фурье.

В формуле (1; 1; 3) интеграл Фурье применим ко всякому «оригиналу», т. е. ко всякой функции, удовлетворяющей трем условиям, перечисленным в начале этого параграфа.

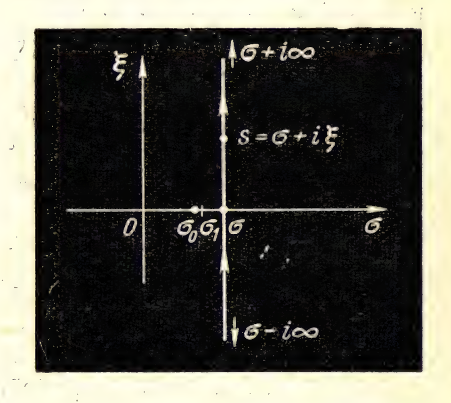


Рис. 1

Внешний интеграл по комплексному аргументу s в правой части формулы (1; 1; 3), как было указано, берется вдоль прямой $\operatorname{Re}(s) = \sigma$, параллельной мнимой оси и лежащей справа от прямой $\operatorname{Re}(s) = \sigma_0$, поскольку $\sigma \geqslant \sigma > \sigma_0$ (рис. 1).

§ 2. Оригинал и изображение, связь между ними

Выделим в преобразованном интеграле Фурье (формула (1; 1; 3) предыдущего параграфа) его внутренний и внешний интегралы. Поскольку внутренний интеграл зависит от комплексного параметра s, он будет функци-

ей комплексного переменного s, для которой мы введем обозначение $\overline{f(s)}$. Итак,

$$\overline{f(s)}=\int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt \qquad (1;\ 2;\ 1)$$

(поскольку обозначение переменной интегрирования теперь уже роли не играет, мы ее обозначили через t). Внося в формулу (1; 1; 3) принятое обозначение внутреннего интеграла (1; 2; 1), приводим преобразованный интеграл Фурье к виду

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st}\,\overline{f(s)}\, ds. \qquad (1;\ 2;\ 2)$$

Формула (1; 2; 1) осуществляет так называемое интегральное преобразование Лапласа функции $f(t)$, сопоставляя всякому «оригиналу» $f(t)$ некоторую функцию комплексного переменного $\overline{f(s)}$. Эта функция $\overline{f(s)}$ называется «*Лапласовым изображением*», или просто «изображением» данного оригинала. Тот факт, что функция комплексного переменного $\overline{f(s)}$ является «изображением» функции вещественного аргумента $f(t)$ (ее «оригинала»), в операционном исчислении обозначается одним из символов

$$\overline{f(s)} \risingdotseq f(t), \text{ или } \overline{f(s)} \dot{\rightarrow} f(t), \text{ или } \overline{f(s)} = L\{f(t)\}.$$

В дальнейшем будем придерживаться первого из этих обозначений. Формула (1; 2; 2), в которую превратился преобразованный интеграл Фурье, позволяет восстановить «оригинал» по его известному «изображению» и называется *интегралом Римана — Меллина*, или *формулой обращения.*

Таким образом, обе эти формулы вместе устанавливают прямую и обратную связь между двумя функциями: функцией вещественного переменного $f(t)$ («оригиналом») и функцией комплексного переменного $\overline{f(s)}$ («изображением» этого оригинала).

Свойства изображения $\overline{f(s)}$

Если функция вещественного аргумента $f(t)$ является оригиналом, т. е. удовлетворяет трем условиям изображаемости по Лапласу, перечисленным в начале § 1 этой главы, то интеграл Лапласа, стоящий в правой части формулы (1; 2; 1) при значениях переменного s, удовлетворяющих условию $\mathrm{Re}(s)=\sigma\geqslant\sigma_1>\sigma_0$, сходится абсолютно и равномерно; это следует из оценки

$$\left|\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt\right|\leqslant\int_0^\infty |e^{-st}|\,|f(t)|\,dt<$$

$$<\int_0^\infty e^{-\sigma t}Me^{\sigma_0 t}dt=\frac{M}{\sigma-\sigma_0}. \qquad (1;\ 2;\ 3)$$

Так как при этом подынтегральная функция интеграла Лапласа в этой области плоскости s является регулярной функцией комплексного переменного s, то в силу теоремы 2, § 2 введения функция $\overline{f(s)}$, определяемая интегралом Лапласа, сама в этой области будет регулярной и, кроме того, ее производные можно находить, выполняя дифференцирование по s под знаком интеграла. Подчеркнем, что в силу этого, все особые точки функции $\overline{f(s)}$ лежат слева от прямой $\mathrm{Re}(s)=\sigma_0$.

Теорема. *Если функция вещественного аргумента* $f(t)$ *является «оригиналом», то интеграл Лапласа сопоставляет ей в качестве ее «изображения» единственную функцию комплексного переменного* $\overline{f(s)}$, которая является регулярной функцией от s в полуплоскости $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$.

По своему изображению $\overline{f(s)}$ оригинал может быть восстановлен по формуле обращения (1; 2; 2), причем в точках разрыва непрерывности оригинала его значения, определяемые формулой обращения, окажутся равными полусумме предельных значений оригинала слева и справа от точки разрыва $\left[\frac{1}{2}\{f(t_0-0)+f(t_0+0)\}\right]$: с учетом этого обстоятельства можно утверждать, что связь между оригиналом и изображением взаимно однозначна, иными словами, не только каждому оригиналу соответствует единственное изображение, но и каждому изображению — единственный оригинал.

В связи с этим, естественно, возникает вопрос, каким условиям должна удовлетворять функция комплексного переменного $\overline{f(s)}$, чтобы ее можно было принять за изображение некоторого оригинала $f(t)$. Ответом на этот вопрос служит следующая теорема обращения. *Пусть функция комплексного переменного* $\overline{f(s)}$ *удовлетворяет следующим трем условиям:*

1) *она регулярна в правой полуплоскости* s, *определяемой неравенством* $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$;

2) *в этой полуплоскости функция* $\overline{f(s)}$ *равномерно стремится к нулю, когда* s *стремится к бесконечности, т. е. при всяком малом* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое большое* $R = R(\varepsilon)$, *что* $|\overline{f(s)}| < \varepsilon$ *при* $|s| > R(\varepsilon)$, *если* $\mathrm{Re}(s) \geqslant \sigma_1 > \sigma_0$;

3) *функция* $\overline{f(s)}$ *абсолютно интегрируема вдоль всякой прямой, параллельной мнимой оси, лежащей в полуплоскости* $\mathrm{Re}(s) \geqslant \sigma_1 > \sigma_0$, т. е.

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} |\overline{f(s)}||ds| = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{|f(\sigma+i\xi|} d\xi = A < \infty.$$

При выполнении этих условий функция $\overline{f(s)}$ *является изображением оригинала, которым служит функция вещественного аргумента* $f(t)$, *определяемая по* $\overline{f(s)}$ *при помощи формулы обращения*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st} \overline{f(s)} ds, \qquad (1;\ 2;\ 2)$$

где путь интегрирования — любая прямая, параллельная мнимой оси, лежащая в полуплоскости $\mathrm{Re}(s) \geqslant \sigma_1 > > \sigma_0$.

Для доказательства этой теоремы надо доказать справедливость следующих четырех положений:

1. Интеграл Римана — Меллина, стоящий в правой части формулы (1; 2; 2), не зависит от выбора σ, лишь бы $\sigma \geqslant \sigma_1 > \sigma_0$.

2. Функция $f(t)$, определяемая формулой (1; 2; 2), удовлетворяет первому условию изображаемости: при $t < 0$, $f(t) \equiv 0$.

3. Функция $f(t)$ удовлетворяет также и второму условию изображаемости: при $t > 0$, $|f(t)| < Me^{\sigma_1 t}$.

4. Функция $f(t)$, определяемая формулой (1; 2; 2), действительно имеет своим изображением функцию $\overline{f(s)}$.

Переходим к доказательству этих утверждений.

1. Для доказательства независимости интеграла Римана — Меллина от выбора σ рассмотрим интеграл от той же подынтегральной функции, взятый по периметру Г прямоугольника (рис. 2), образованного двумя прямыми, параллельными мнимой оси плоскости s [$\mathrm{Re}\,(s)=\sigma_1>\sigma_0$ и $\mathrm{Re}(s)=\sigma_2>\sigma_1$], и двумя прямыми, параллельными вещественной оси ($\mathrm{Im}(s)=\pm R$).

Интеграл по этому замкнутому контуру будет равен нулю в силу теоремы Коши, так как внутри его и на нем подынтегральная функция регулярна. Итак,

$$\oint\limits_{\Gamma} e^{st}\overline{f(s)}\,ds=\int\limits_{\sigma_2-iR}^{\sigma_2+iR} e^{st}\overline{f(s)}\,ds+\int\limits_{\sigma_2+iR}^{\sigma_1+iR} e^{st}\overline{f(s)}\,ds+$$

$$+\int\limits_{\sigma_1+iR}^{\sigma_1-iR} e^{st}\overline{f(s)}\,ds+\int\limits_{\sigma_1-iR}^{\sigma_2-iR} e^{st}\overline{f(s)}\,ds=0.$$

Произведем оценку второго слагаемого: в силу 2-го условия, которому удовлетворяет функция $\overline{f(s)}$, каково бы ни было малое $\varepsilon>0$, при достаточно большом R, будем иметь $|\overline{f(s)}|<\varepsilon$ на соответствующем отрезке прямой $\mathrm{Im}(s)=R$. Поэтому

$$\left|\int\limits_{\sigma_2+iR}^{\sigma_1+iR} e^{st}\overline{f(s)}\,ds\right|\leqslant\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}|e^{st}||\overline{f(s)}|\,d\sigma<$$

$$<\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{\sigma t}\varepsilon\,d\sigma<\varepsilon e^{\sigma_2 t}\,(\sigma_2-\sigma_1)$$

(так как в силу условия $\sigma_1<\sigma_2$, $e^{\sigma t}<e^{\sigma_2 t}$ при $t>0$; при $t<0$ в оценку вошел бы член $e^{\sigma_1 t}$).

Эта оценка показывает, что

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\sigma_2+iR}^{\sigma_1+iR} e^{st}\overline{f(s)}\,ds=0.$$

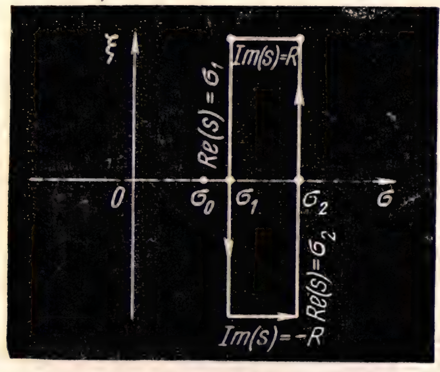


Рис. 2

Аналогичную оценку имеет и четвертое слагаемое.

Но тогда, переходя к пределу при $R\to\infty$, находим

$$\int_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty} e^{st}\overline{f(s)}\,ds+\int_{\sigma_1+i\infty}^{\sigma_1-i\infty} e^{st}\overline{f(s)}\,ds=0,$$

или

$$\int_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty} e^{st}\overline{f(s)}\,ds=\int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} e^{st}\overline{f(s)}\,ds.$$

Таким образом, первое утверждение доказано.

2. Для доказательства второго утверждения рассмотрим $\oint\limits_{\Gamma} e^{st}\overline{f(s)}\,ds$, где контур Г (рис. 3) состоит из прямой

$\mathrm{Re}(s) = \sigma \geqslant \sigma_1 > \sigma_0$ (здесь всегда можно полагать, что $\sigma > 0$, поскольку выбор σ, по доказанному, роли не играет) и опирающейся на эту прямую и лежащей справа от нее дуги C_R окружности радиуса R с центром в нулевой

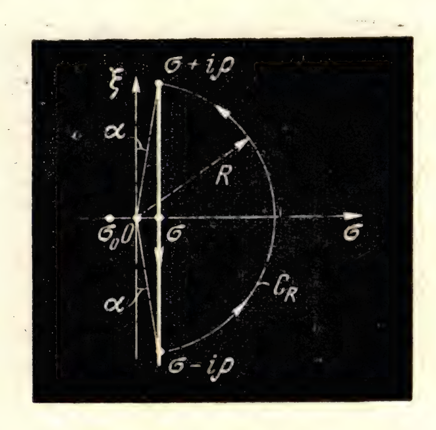


Рис. 3

точке. Этот интеграл также равен нулю, так как внутри контура Г и на нем подынтегральная функция всюду регулярна. Итак,

$$\oint_{\Gamma} e^{st} \overline{f(s)}\, d_s = \int_{C_R} e^{st} \overline{f(s)}\, ds + \int_{\sigma+i\rho}^{\sigma-i\rho} e^{st} \overline{f(s)}\, ds = 0 \quad (1;\ 2;\ 4)$$

(через $\pm\rho$ обозначены ординаты точек пересечения дуги C_R с прямой $\mathrm{Re}(s) = \sigma$).

Оценим интеграл по дуге C_R; на этой дуге имеем $s = \mathrm{R}e^{i\varphi} = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; $ds = \mathrm{R}\, e^{i\varphi} i\, d\varphi$.

Угол φ меняется от значения $-\frac{\pi}{2}+\alpha$ в нижнем конце дуги (в точке $\sigma - i\rho$) до значения $\frac{\pi}{2}-\alpha$ в верхнем конце дуги (в точке $\sigma + i\rho$).

В силу 2-го условия, которому удовлетворяет функция $\overline{f(s)}$, каково бы ни было малое $\varepsilon > 0$, можно выбрать R настолько большим, чтобы $|\overline{f(s)}| < \varepsilon$ всюду на дуге C_R. Но тогда имеем

$$\left|\int\limits_{C_R} e^{st}\,\overline{f(s)}\,ds\right| = \left|\int\limits_{-\frac{\pi}{2}+\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} e^{Rt(\cos\varphi + i\sin\varphi)}\,\overline{f(s)}\,Rie^{i\varphi}d\varphi\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\frac{\pi}{2}+\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} |e^{Rt(\cos\varphi + i\sin\varphi)}|\,|\overline{f(s)}|\,Rd\varphi < 2R\varepsilon \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} e^{Rt\cos\varphi}d\varphi <$$

$$< 2R\varepsilon \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{Rt\cos\varphi}d\varphi$$

(поскольку $|e^{Rt(\cos\varphi + i\sin\varphi)}| = e^{Rt\cos\varphi}$, и функция $e^{Rt\cos\varphi}$ — четная).

Положим в последнем интеграле $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$; получим

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{Rt\cos\varphi}\,d\varphi = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{Rt\sin\psi}d\psi.$$

Мы приходим к оценке

$$\left|\int_{C_R} e^{st}\,\overline{f(s)}\,ds\right| < 2R\varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{Rt\sin\psi} d\varphi. \qquad (1;\ 2;\ 5)$$

Но при $0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$ имеем

$$1 \geqslant \frac{\sin\psi}{\psi} \geqslant \frac{2}{\pi}, \text{ откуда } \sin\psi \geqslant \frac{2}{\pi}\psi.$$

Поэтому при $t<0$ будут справедливы следующие неравенства:

$$Rt\sin\psi \leqslant \frac{2}{\pi} Rt\psi,\ e^{Rt\sin\psi} \leqslant e^{\frac{2}{\pi} Rt\psi} = e^{-\frac{2}{\pi} R|t|\psi},$$

в силу чего

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{Rt\sin\psi} d\psi < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi} R|t|\psi} d\psi = \frac{\pi}{2R|t|}\left[1 - e^{-R|t|}\right].$$

Оценка (1; 2; 5) примет вид

$$\left|\int_{C_R} e^{st}\,\overline{f(s)}\,ds\right| < 2R\varepsilon \frac{\pi}{2R|t|}(1 - e^{-R|t|}) < \frac{\pi\varepsilon}{|t|}.$$

Эта оценка показывает, что $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} e^{st}\overline{f(s)}\,ds = 0$ (при $t < 0$), в силу чего (см. 1; 2; 4)

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\sigma-i\rho}^{\sigma+i\rho} e^{st}\overline{f(s)}\,ds = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{st}\overline{f(s)}\,ds = 0, \text{ если } t < 0.$$

Итак, мы доказали, что при $t<0$, $f(t)\equiv 0$.

3. Докажем, что функция $f(t)$, определяемая формулой обращения (1; 2; 2), при $t>0$ удовлетворяет оценке

$$|f(t)|<Me^{\sigma_1 t}.$$

В силу 3-го условия, которому удовлетворяет функция $\overline{f(s)}$, имеем

$$\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}|\overline{f(s)}|\,|ds|=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(\sigma+i\xi)|\,d\xi=A<\infty.$$

Но тогда

$$|f(t)|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{st}\,\overline{f(s)}\,ds\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}|e^{st}|\,|\overline{f(s)}|\,|ds|=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{\sigma t}\,|\overline{f(s)}|\,|ds|=\frac{e^{\sigma t}}{2\pi}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}|\overline{f(s)}|\,|ds|<\frac{A}{2\pi}\,e^{\sigma t}=Me^{\sigma t}$$

$\left(\text{где положено } \frac{A}{2\pi}=M\right)$.

Поскольку же выбор σ произволен и σ можно взять равным σ_1 $(\sigma\geqslant\sigma_1>\sigma_0)$, приходим к оценке

$$|f(t)|<Me^{\sigma_1 t}. \qquad (1;\ 2;\ 6)$$

4. Докажем, что при оговоренных условиях функция $\overline{f(s)}$ является изображением оригинала $f(t)$, определяемого по ней формулой обращения **(1; 2; 2)**, т. е., что

$$\overline{f(s)}=\int\limits_0^{\infty}e^{-st}f(t)\,dt, \text{ где } \operatorname{Re}(s)=\sigma\geqslant\sigma_1>\sigma_0. \qquad (1;\ 2;\ 7)$$

Внесем под знак интеграла в формулу (1; 2; 7) значение $f(t)$, определяемое формулой (1; 2; 2)

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1^*-i\infty}^{\sigma_1^*+i\infty} e^{qt}\, \overline{f(q)}\, dq \right\} dt$$

(здесь через q обозначена переменная интегрирования в формуле (1; 2; 2), чтобы отличить эту переменную от параметра s внешнего интеграла, причем будем считать, что $\operatorname{Re}(s) = \sigma > \sigma_1^* = \operatorname{Re}(q) \geqslant \sigma_1 > \sigma_0$).

В правой части последнего равенства порядок интегрирования можно изменить:

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1^*-i\infty}^{\sigma_1^*+i\infty} \overline{f(q)}\, dq \int_0^\infty e^{-(s-q)t}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1^*-i\infty}^{\sigma_1^*+i\infty} \frac{\overline{f(q)}\, dq}{s-q}. \quad (1;\ 2;\ 8)$$

Здесь

$\int_0^\infty e^{-(s-q)t}\, dt = \frac{1}{s-q}$, так как $\operatorname{Re}(q) = \sigma_1^*$, $\operatorname{Re}(s) = \sigma > \sigma_1^*$

и поэтому $\operatorname{Re}(s-q) = \sigma - \sigma_1^* > 0$.

Рассмотрим теперь интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_R} \frac{\overline{f(q)}\, dq}{q-s},$$

где контур Γ_R (рис. 4) составлен из отрезка прямой $\mathrm{Re}(q)=\sigma_1{}^*$ и опирающейся на эту прямую и лежащей справа от нее дуги C_R окружности радиуса R с центром в нулевой точке. Поскольку можно считать, что при достаточно большом R точка $q=s$ лежит внутри контура Γ_R (в силу условия $\mathrm{Re}(s)=\sigma>\sigma_1{}^*>\sigma_0$), этот интеграл является интегралом Коши для функции $\overline{f(q)}$, регулярной внутри контура Γ_R и на нем, и поэтому равен значению функции $\overline{f(q)}$ в точке $q=s$, или

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_R}\frac{\overline{f(q)}\,dq}{q-s}=\overline{f(s)}.\quad(1;\ 2;\ 9)$$

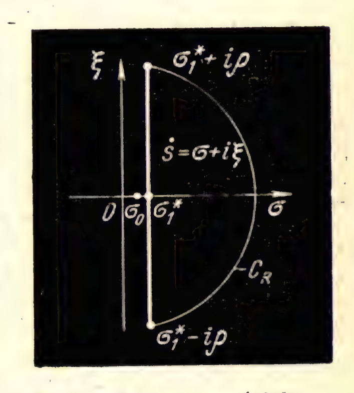


Рис. 4

Это же равенство сохранится и в пределе при $R\to\infty$.

С другой стороны, имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_R}\frac{\overline{f(q)}\,dq}{q-s}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{\overline{f(q)}\,dq}{q-s}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1^*+i\rho}^{\sigma_1^*-i\rho}\frac{\overline{f(q)}dq}{q-s}\quad(1;\ 2;\ 10)$$

(здесь через $\pm\rho$ обозначены ординаты точек пересечения прямой $\mathrm{Re}(q)=\sigma_1^*$ с дугой окружности C_R). Нетрудно показать, что $\lim\limits_{R\to\infty}\oint_{C_R}\frac{\overline{f(q)}\,dq}{q-s}=0$. В самом деле, каково бы ни было малое $\varepsilon>0$, R можно выбрать настолько большим, чтобы всюду на дуге C_R удовлетворялось не-

равенство $|\overline{f(q)}|<\varepsilon$ (см. 2-е условие, наложенное на функцию $\overline{f(s)}$). Но тогда имеем оценку

$$\left|\int_{C_R}\frac{\overline{f(q)}\,dq}{q-s}\right|\leqslant\int_{C_R}\frac{|\overline{f(q)}|\,|dq|}{|q-s|}<\int_{C_R}\frac{\varepsilon\,|dq|}{R-|s|}=\frac{\varepsilon}{R-|s|}L\{C_R\}.$$

Здесь использована оценка

$$|q-s|>|q|-|s|=R-|s|,$$

и в силу этого

$$\frac{1}{|q-s|}<\frac{1}{R-|s|}.$$

Через $L\{C_R\}$ обозначена длина дуги C_R, очевидно, $L\{C_R\}<2\pi R$, поэтому предыдущая оценка приводится к виду

$$\left|\int_{C_R}\frac{\overline{f(q)}\,dq}{q-s}\right|<\frac{2\pi R\varepsilon}{R-|s|}=\frac{2\pi\varepsilon}{1-\frac{|s|}{R}},$$

откуда и следует, что

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{\overline{f(q)}\,dq}{q-s}=0. \qquad (1;\ 2;\ 11)$$

Переходя в равенстве (1; 2; 9) к пределу при $R\to\infty$ и используя равенство (1; 2; 10), находим

$$\overline{f(s)}=\frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{\overline{f(q)}\,dq}{q-s}=\frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{\overline{f(q)}\,dq}{q-s}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int\limits_{\sigma_1^*+i\rho}^{\sigma_1^*-i\rho}\frac{\overline{f(q)}\,dq}{q-s}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1^*+i\infty}^{\sigma_1^*-i\infty}\frac{\overline{f(q)}\,dq}{q-s}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1^*-i\infty}^{\sigma_1^*+i\infty}\frac{\overline{f(q)}\,dq}{s-q}.$$

Сопоставляя этот результат с равенством (1; 2; 8), находим окончательно

$$\overline{f(s)}=\int\limits_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt,$$

что и завершает доказательство как 4-го из перечисленных утверждений, так и, следовательно, самой сформулированной теоремы.

Итак, при выполнении оговоренных условий функция комплексного переменного $\overline{f(s)}$ может рассматриваться как изображение оригинала $f(t)$, определяемого по ней при помощи формулы обращения (1; 2; 2)

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{st}\,\overline{f(s)}\,ds, \qquad (1;\ 2;\ 2)$$

где путь интегрирования — прямая, параллельная мнимой оси и проходящая справа от всех особых точек функции $\overline{f(s)}$.

ГЛАВА ВТОРАЯ

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Линейные свойства преобразования Лапласа

Из линейных свойств определенного интеграла, остающихся справедливыми и для несобственных интегралов, в частности и для интеграла Лапласа, вытекают следующие следствия в отношении преобразования Лапласа.

1. При умножении на постоянный множитель оригинала изображение также умножается на этот множитель, т. е. из соотношения $f(t) \doteqdot \overline{f(s)}$ следует соотношение

$$Cf(t) \doteqdot C\overline{f(s)}, \qquad (2;\ 1;\ 1)$$

где $C = \text{const}$.

2. Сумме оригиналов в качестве их изображения соответствует сумма их изображений, т. е. из соотношений $f_1(t) \doteqdot \overline{f_1(s)}$, $f_2(t) \doteqdot \overline{f_2(s)}$ следует соотношение

$$f_1(t) + f_2(t) \doteqdot \overline{f_1(s)} + \overline{f_2(s)}. \qquad (2;\ 1;\ 2)$$

Из приведенных двух предложений вытекает как следствие третье.

3. Любой линейной комбинации оригиналов в качестве их изображения соответствует такая же линейная комбинация их изображений, т. е. из соотношений

$f_j(t) \risingdotseq \overline{f_j(s)}$ $(j=1, 2, \ldots, k)$ следует соотношение

$$\sum_{j=1}^{j=k} C_j f_j(t) \risingdotseq \sum_{j=1}^{j=k} C_j \overline{f_j(s)}, \qquad (2;\ 1;\ 3)$$

где $C_j = \mathrm{const}$.

§ 2. Теоремы дифференцирования и интегрирования оригинала и изображения

Дифференцирование оригинала

Допустим, что оригинал $f(t)$ — дифференцируемая функция и его производная $f'(t)$ также является оригиналом, причем

$|f(t)| < Me^{\sigma_0 t}$, $|f'(t)| < M_1 e^{\sigma_0' t}$ при $t > 0$. Пусть $f(t) \risingdotseq \overline{f(s)}$, $f'(t) \risingdotseq \overline{f_1(s)}$.

Найдем связь между $\overline{f(s)}$ и $\overline{f_1(s)}$. Имеем

$$\overline{f_1(s)} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\, dt.$$

Выберем здесь s так, чтобы одновременно выполнялись неравенства $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$, $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0'$. Выполняя в правой части интегрирование по частям, причем $u = e^{-st}$, $dv = f'(t)dt$, находим

$$\overline{f_1(s)} = f(t)\, e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt =$$

$$= -f(0) + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = -f(0) + s\,\overline{f(s)}$$

(в силу условий $|f(t)| < Me^{\sigma_0 t}$, $\mathrm{Re}(s) = \sigma \geqslant \sigma_1 > \sigma_0$, поэтому $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-st} f(t) = 0$). Таким образом, мы получили следующий результат: из соотношения $f(t) \doteq \overline{f(s)}$ следует соотношение

$$f'(t) \doteq s\,\overline{f(s)} - f(0) \qquad (2;\ 2;\ 1)$$

(при условии, что $f'(t)$ также является оригиналом).

Предполагая, что оригинал $f(t)$ дифференцируем n раз и что $f^{(n)}(t)$ также является оригиналом, методом индукции из формулы (2; 2; 1) получим следующий результат: из соотношения $f(t) \doteq \overline{f(s)}$ следует соотношение

$$f^{(n)}(t) \doteq s^n\,\overline{f(s)} - \{s^{n-1}f(0) + s^{n-2}f'(0) + \ldots + f^{(n-1)}(0)\} \qquad (2;\ 2;\ 2)$$

Интегрирование оригинала

Убедимся прежде всего в том, что если $f(t)$ — оригинал, то оригиналом будет служить и $\varphi(t) = \int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau$.

Очевидно, для функции $\varphi(t)$ первое и третье условия изображаемости (см. гл. 1) выполняются автоматически: 1) при $t < 0$, $\varphi(t) \equiv 0$, 2) интеграл от кусочно-монотонной и кусочно-непрерывной функции сам будет функцией кусочно-монотонной и непрерывной. Остается доказать выполнение 2-го условия.

Из оценки $|f(t)| < Me^{\sigma_0 t}$ следует, что

$$|\varphi(t)| = \left|\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau\right| \leqslant \int\limits_0^t |f(\tau)|\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant M\int_0^t e^{\sigma_0\tau}d\tau=\frac{M}{\sigma_0}[e^{\sigma_0 t}-1].$$

Отсюда находим:

а) при $\sigma_0>0$ $|\varphi(t)|<\frac{M}{\sigma_0}e^{\sigma_0 t}$,

б) при $\sigma_0<0$ $|\varphi(t)|<\frac{M}{|\sigma_0|}$

(если $\sigma_0=0$, заменяем его большим числом и используем оценку а). Полученные оценки показывают, что высказанное утверждение справедливо: интеграл от оригинала также является оригиналом.

Найдем теперь изображение функции $\varphi(t)=\int_0^t f(\tau)\,d\tau$.

Так как $f(t)=\varphi'(t)$, то, полагая $\varphi(t)\doteqdot\overline{\varphi(s)}$, по формуле (2; 2; 1) находим связь между $\overline{\varphi(s)}$ и $\overline{f(s)}$:

$$\overline{f(s)}=s\overline{\varphi(s)}-\varphi(0)=s\overline{\varphi(s)}$$

$(\varphi(0)=0)$. Отсюда

$$\overline{\varphi(s)}=\frac{1}{s}\overline{f(s)}.$$

Мы пришли к следующему результату: из соотношения $f(t)\doteqdot\overline{f(s)}$ следует

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau\doteqdot\frac{1}{s}\overline{f(s)}.\qquad(2;\ 2;\ 3)$$

Дифференцирование изображения

В главе 1, § 2, говоря о свойствах изображения, было установлено, что изображение является регулярной функцией комплексного переменного s в полуплоскости $\operatorname{Re}(s)=\sigma \geqslant \sigma_1 > \sigma_0$ и что в этой полуплоскости дифференцирование изображения можно выполнять под знаком интеграла Лапласа. Поэтому из равенства

$$\overline{f(s)} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \text{ следует}$$

$$\frac{d^n \overline{f(s)}}{ds^n} = \int_0^\infty e^{-st} (-t)^n f(t)\, dt.$$

Но в правой части мы имеем изображение функции $(-1)^n t^n f(t)$, которая является оригиналом, если оригиналом будет $f(t)$. Таким образом, приходим к следующему результату: из соотношения $f(t) \doteqdot \overline{f(s)}$ следует

$$(-1)^n t^n f(t) \doteqdot \frac{d^n \overline{f(s)}}{ds^n}. \qquad (2;\ 2;\ 4)$$

Интегрирование изображения

Допустим, что оригинал $f(t)$ удовлетворяет условию $\left|\frac{f(t)}{t}\right| < A$ при $t \to +0$; нетрудно убедиться, что в этом случае функция $\frac{f(t)}{t}$ также будет оригиналом. В самом деле, при этих условиях на $[0;\ 1]$ функция $\frac{f(t)}{t}$ будет ограниченной $\left(\left|\frac{f(t)}{t}\right| < A_1\right)$, а при $t > 1$ будет

справедлива оценка

$$\left|\frac{f(t)}{t}\right| < |f(t)| < Me^{\sigma_0 t}.$$

Остальные два условия изображаемости в проверке не нуждаются. Полагая условие $\left|\frac{f(t)}{t}\right| < A$ при $t \to +0$ выполненным, проинтегрируем равенство

$$\overline{f(s)} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

по переменной s вдоль любого пути, лежащего в полуплоскости $\operatorname{Re}(s) \geqslant \sigma_1 > \sigma_0$ от произвольной точки s до ∞ (причем $\operatorname{Re}(s) \to +\infty$)

$$\int_s^\infty \overline{f(s)}\, ds = \int_s^\infty ds \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt.$$

Меняя порядок интегрирования в правой части, находим

$$\int_s^\infty \overline{f(s)}\, ds = \int_0^\infty f(t)\, dt \int_s^\infty e^{-st} ds =$$

$$= \int_0^\infty f(t)\, dt \left\{-\frac{e^{-st}}{t}\right\}\Bigg|_s^\infty = \int_0^\infty e^{-st}\, \frac{f(t)}{t}\, dt.$$

Поскольку последний интеграл в предыдущем равенстве равномерно сходящийся (ибо он определяет изображение оригинала $\frac{f(t)}{t}$), изменение порядка интегрирования было законно (см. примечание к формуле (0; 1; 7) § 1

Введения). Полученный результат можно формулировать в следующем виде: если

$\left|\frac{f(t)}{t}\right| < A$ при $t \to +0$ $\Big($т. е. если функция $\frac{f(t)}{t}$ — оригинал), то из соотношения $f(t) \doteqdot \overline{f(s)}$ следует соотношение

$$\frac{f(t)}{t} \doteqdot \int_{s}^{\infty} \overline{f(s)}\, ds. \qquad (2;\ 2;\ 5)$$

§ 3. Теоремы смещения и запаздывания

Теорема смещения

Если функция $f(t)$ является оригиналом, то при любом вещественном или комплексном α оригиналом будет являться и функция $e^{\alpha t} f(t)$, так как из оценки $|f(t)| < Me^{\sigma_0 t}$ вытекает

$$|e^{\alpha t} f(t)| < Me^{[\sigma_0 + \mathrm{Re}(\alpha)]t} \text{ при } t > 0.$$

Найдем изображение этой функции.

$$e^{\alpha t} f(t) \doteqdot \int_0^{\infty} e^{-st} e^{\alpha t} f(t)\, dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha)t} f(t)\, dt.$$

Интеграл в правой части последнего равенства отличается от интеграла Лапласа, определяющего изображение $\overline{f(s)} \doteqdot f(t)$ лишь тем, что в последнем аргумент изображения s заменен на $s-\alpha$. Таким образом, полученный результат можно формулировать в следующем виде: из соотношения $f(t) \doteqdot \overline{f(s)}$ следует соотношение

$$e^{\alpha t} f(t) \doteqdot \overline{f(s-\alpha)}, \qquad (2;\ 3;\ 1)$$

т. е. при умножении оригинала на $e^{\alpha t}$ в плоскости изображения происходит смещение аргумента на вектор α (рис. 5), что и объясняет наименование данной теоремы (мы пользуемся в данном случае изображением комплексных чисел векторами).

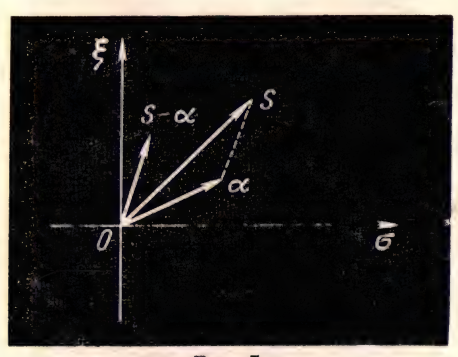


Рис. 5

Теорема запаздывания

Введем предварительно понятие единичной функции. *Единичной функцией*, для которой мы примем обозначение $u(t)$, называется функция, определяемая следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} u(t) &= 1 \quad \text{при} \quad t > 0, \\ u(t) &= 0 \quad \text{при} \quad t < 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2;\ 3;\ 2)$$

Функцию $u(t-\tau)$, где τ — положительная постоянная, которая в силу равенств (2; 3; 2) будет иметь значения:

$$\left.\begin{aligned} u(t-\tau) &= 1 \ \text{при} \ t > \tau, \\ u(t-\tau) &= 0 \ \text{при} \ t < \tau, \end{aligned}\right\} \qquad (2;\ 3;\ 3)$$

называют единичной функцией запаздывающего аргумента. Графики функций $u(t)$ и $u(t-\tau)$ изображены на рис. 6.

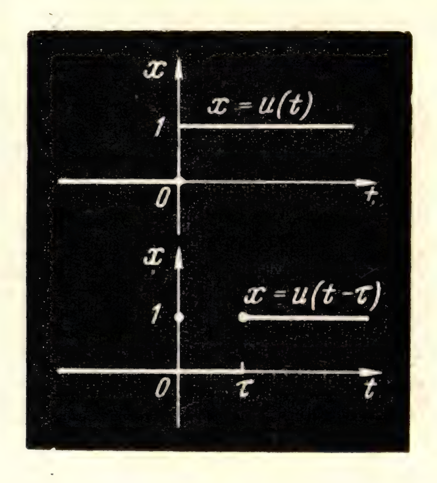


Рис. 6

Для любого оригинала $f(t)$ можно построить соответствующую функцию запаздывающего аргумента $f_\tau(t)$, полагая

$$f_\tau(t)=f(t-\tau). \qquad (2;\ 3;\ 4)$$

Функция, определяемая равенством (2; 3; 4), равна нулю при $t<\tau$ и принимает те же значения, что и функция $f(t)$, но на τ единиц аргумента «позднее»: ее график получается из графика функции $f(t)$ сдвигом вдоль оси t на τ единиц вправо (рис. 7).

Найдем изображение «запаздывающего» оригинала. Имеем

$$f(t-\tau) \doteqdot \int_0^\infty e^{-st} f(t-\tau)\, dt.$$

В интеграле, стоящем справа, подынтегральная функция равна нулю при $t<\tau$, так как для таких t имеем

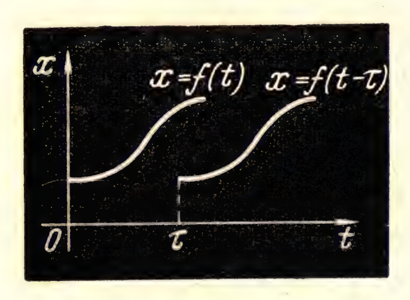


Рис. 7

$f(t-\tau)=0$. В силу этого предыдущее равенство приводится к виду

$$f(t-\tau) \doteqdot \int_\tau^\infty e^{-st} f(t-\tau)\, dt.$$

Заменим переменную интегрирования в последнем интеграле, полагая $t-\tau=t_1$; найдем, поскольку $dt=dt_1$, а пределы интегрирования станут 0 и ∞

$$f(t-\tau) \doteqdot \int_0^\infty e^{-s(t_1+\tau)} f(t_1)\, dt_1 =$$

$$=e^{-s\tau}\int\limits_0^\infty e^{-st_1} f(t_1)\,dt_1 = e^{-s\tau}\overline{f(s)},$$

где, как всегда, через $\overline{f(s)}$ обозначено изображение оригинала $f(t)$. Таким образом, из соотношения $f(t) \doteqdot \overline{f(s)}$ следует соотношение

$$f(t-\tau) \doteqdot e^{-s\tau}\overline{f(s)}. \qquad (2;\ 3;\ 5)$$

§ 4. Теоремы свертывания

«Сверткой» двух функций вещественного аргумента $f_1(t)$ и $f_2(t)$ называется третья функция $F(t)$, определяемая следующим образом:

$$F(t) = \int\limits_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau. \qquad (2;\ 4;\ 1)$$

Совершая в интеграле справа замену переменной интегрирования по формуле $\tau = t - \tau_1$, нетрудно убедиться, что от перестановки функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ их свертка не изменяется:

$$\int\limits_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau = \int\limits_0^t f_1(t-\tau_1) f_2(\tau_1)\,d\tau_1. \ (2;\ 4;\ 2)$$

Покажем, что свертка двух оригиналов в свою очередь будет оригиналом. Первое условие изображаемости для свертки двух оригиналов выполнено всегда: $F(t) = 0$ при $t<0$, поскольку в этом случае в интервале интегрирования $t \leqslant \tau \leqslant 0$ и поэтому обе подынтегральные функции равны нулю. Проверим выполнение второго условия.

Пусть оригиналы $f_1(t)$ и $f_2(t)$ имеют при $t>0$ оценки

$$|f_1(t)| < M_1 e^{\sigma_0' t}; \quad |f_2(t)| < M_2 e^{\sigma_0'' t}.$$

Усилим одно из этих неравенств, заменяя меньшее из чисел σ'_0 и σ''_0 бо́льшим из них (обозначим его через σ_0)

$$\sigma_0 = \max\left[\sigma_0', \sigma_0''\right],$$

$$|f_1(t)| < M_1 e^{\sigma_0 t}; \quad |f_2(t)| < M_2 e^{\sigma_0 t}.$$

После этого находим следующую оценку $F(t)$:

$$|F(t)| = \left| \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t |f_1(\tau)||f_2(t-\tau)|\, d\tau < M_1 M_2 \int_0^t e^{\sigma_0 \tau} e^{\sigma_0 (t-\tau)}\, d\tau =$$

$$= M_1 M_2 e^{\sigma_0 t} \int_0^t dt = M_1 M_2 t e^{\sigma_0 t} < M_1 M_2 e^{(\sigma_0 + 1)\, t}$$

(поскольку при $t>0$ $t<e^t$). Эта оценка показывает, что свертка двух оригиналов в свою очередь будет оригиналом, поскольку третье условие (выполнение условий Дирихле) для свертки будет выполнено всегда, ибо интеграл от произведения кусочно-монотонных функций, имеющих конечное число точек разрыва на интервале интегрирования, будет функцией непрерывной и кусочно-монотонной.

Теорема свертывания оригиналов

Докажем, что изображением свертки двух оригиналов служит произведение их изображений, т. е. что из соотношений

$$f_1(t) \risingdotseq \overline{f_1(s)}, \quad f_2(t) \risingdotseq \overline{f_2(s)}$$

следует соотношение

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \doteqdot \overline{f_1(s)}\,\overline{f_2(s)}. \qquad (2;\ 4;\ 3)$$

Для доказательства запишем изображение свертки через интеграл Лапласа

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \doteqdot \int_0^\infty e^{-st} dt \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau.$$

Меняя в правой части порядок интегрирования (что возможно, так как интеграл Лапласа абсолютно и равномерно сходится), находим

$$\int_0^\infty e^{-st} dt \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau =$$

$$= \int_0^\infty d\tau \int_\tau^\infty e^{-st} f_1(\tau) f_2(t-\tau) dt. \qquad (2;\ 4;\ 4)$$

Для пояснения расстановки пределов при перемене порядка интегрирования воспользуемся рис. 8. Интеграл в левой части равенства (2; 4; 4) можно рассматривать как повторный, полученный при расстановке пределов в следующем двойном интеграле:

$$I = \iint_{(D)} e^{-st} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, dt\, d\tau,$$

где областью интегрирования служит часть плоскости $to\tau$, ограниченная положительной полуосью ot и биссектрисой первого координатного угла $\tau = t$ (на рис. 8 область D заштрихована). Но тогда изменение порядка

интегрирования приводит как раз к интегралу, стоящему в правой части равенства (2; 4; 4).

Итак,

$$\int_0^\infty e^{-st}dt \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_0^\infty f_1(\tau)\,d\tau \int_\tau^\infty e^{-st} f_2(t-\tau)\,dt$$

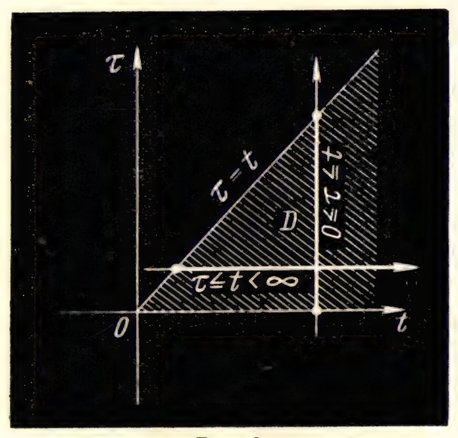


Рис. 8

(множитель $f_1(\tau)$, не зависящий от t, можно вынести из-под знака внутреннего интеграла правой части).

Совершим теперь во внутреннем интеграле правой части замену переменной, полагая $t-\tau=t_1$, тогда, поскольку $dt=dt_1$, при $t=\tau_1$ $t_1=0$, при $t=\infty$ $t_1=\infty$, найдем

$$\int_0^\infty f_1(\tau)\,d\tau \int_\tau^\infty e^{-st} f_2(t-\tau)\,dt =$$

$$\int_0^\infty f_1(\tau)\,d\tau \int_0^\infty e^{-s(t_1+\tau)}\, f_2(t_1)\,dt_1 =$$

$$= \int_0^\infty e^{-s\tau} f_1(\tau)\,d\tau \int_0^\infty e^{-st_1} f_2(t_1)\,dt_1$$

(здесь снова вынесен множитель $e^{-s\tau}$, не зависящий от t_1, из-под знака внутреннего интеграла). В правой части последнего равенства получено произведение интегралов

$$\overline{f_1(s)} = \int_0^\infty e^{-s\tau} f_1(\tau)\,d\tau \quad \text{и} \quad \overline{f_2(s)} = \int_0^\infty e^{-st_1} f_2(t_1)\,dt_1.$$

Итак,

$$\int_0^\infty e^{-st}dt \int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\,d\tau = \overline{f_1(s)}\cdot\overline{f_2(s)}. \quad (2;\ 4;\ 5)$$

Тем самым доказано, что изображение свертки двух оригиналов равно произведению их изображений:

$$\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\,d\tau \doteqdot \overline{f_1(s)}\cdot\overline{f_2(s)}. \qquad (2;\ 4;\ 3)$$

Теорема свертывания изображений

Найдем изображение произведения двух оригиналов. Предварительно заметим, что произведение двух оригиналов всегда в свою очередь является оригиналом.

Последнее утверждение вытекает из следующих оценок: если при $t > 0$,

$$|f_1(t)| < M_1 e^{\sigma_0' t},$$

$$|f_2(t)| = < M_2 e^{\sigma_0'' t},$$

то

$$|F(t)| = |f_1(t) f_2(t)| < M_1 M_2 e^{(\sigma_0' + \sigma_0'')t} \quad (2;\ 4;\ 6)$$

Для изображения $\overline{F(s)}$ оригинала $F(t) = f_1(t) f_2(t)$ имеем

$$\overline{F(s)} = \int_0^{\infty} e^{-st} f_1(t) f_2(t)\, dt, \quad (2;\ 4;\ 7)$$

где $\mathrm{Re}(s) = \sigma \geqslant \sigma_1 > \sigma_0' + \sigma_0''$.

Под знаком интеграла Лапласа в правой части равенства (2; 4; 7) заменим оригинал $f_2(t)$ его выражением по формуле обращения

$$f_2(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma^* - i\infty}^{\sigma^* + i\infty} e^{pt} \overline{f_2(p)}\, dp, \quad (2;\ 4;\ 8)$$

где

$$\overline{f_2(p)} \doteqdot f_2(t) \text{ и } \mathrm{Re}(p) = \sigma^* > \sigma_0''.$$

Найдем

$$\overline{F(s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{-st} f_1(t)\, dt \int_{\sigma^* - i\infty}^{\sigma^* + i\infty} e^{pt} \overline{f_2(p)}\, dp.$$

Изменяя в правой части последнего равенства порядок интегрирования (что возможно в силу равномерной сходимости обоих интегралов), находим

$$\overline{F(s)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma^*-i\infty}^{\sigma^*+i\infty}\overline{f_2(p)}\,dp\int\limits_0^{\infty}e^{-(s-p)\,t}f_1(t)\,dt. \quad (2;\ 4;\ 9)$$

Если принять $\operatorname{Re}(s-p)=\sigma-\sigma^*>\sigma_0'$, что допустимо, поскольку при этом и подавно будет выполнено требуемое для σ неравенство

$$\sigma>\sigma_0'+\sigma^*>\sigma_0'+\sigma_0'',$$

то

$$\int\limits_0^{\infty}e^{-(s-p)\,t}f_1(t)\,dt=\overline{f_1(s-p)},$$

где, как всегда, через $\overline{f_1(s)}$ обозначено изображение оригинала $f_1(t)$. Но тогда равенство (2; 4; 9) приведется к виду

$$\overline{F(s)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma^*-i\infty}^{\sigma^*+i\infty}\overline{f_2(p)}\,\overline{f_1(s-p)}\,dp,$$

или

$$f_1(t)\,f_2(t)\doteqdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma^*-i\infty}^{\sigma^*+i\infty}\overline{f_1(s-p)}\,\overline{f_2(p)}\,dp. \quad (2;\ 4;\ 10)$$

Здесь

$$\operatorname{Re}(p)=\sigma^*>\sigma_0'',\ \operatorname{Re}(s-p)=\sigma-\sigma^*>\sigma_0'.$$

Совершая в формуле (2; 4; 10) замену переменной интегрирования по формулам

$$s-p=q, \quad \operatorname{Re}(q)=\sigma^{**}=\sigma-\sigma^{*}>\sigma_0',$$

преобразуем формулу (2; 4; 10) к виду

$$f_1(t)\,f_2(t) \doteqdot \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma^{**}-i\infty}^{\sigma^{**}+i\infty} \overline{f_1(q)}\,\overline{f_2(s-q)}\,dq. \quad (2;\ 4;\ 10^*)$$

Это показывает, что свертка изображений, так же как и свертка оригиналов, обладает свойством симметрии. Формулы (2; 4; 10) и (2; 4; 10 *) и составляют содержание теоремы свертывания изображений.

§ 5. Теорема подобия, теоремы о связи начальных и конечных значений оригинала и изображения

Теорема подобия

Если функция $f(t)$ является оригиналом, то оригиналом будет и функция $f(\alpha t)$ при произвольном вещественном $\alpha>0$.

Найдем изображение функции $f(\alpha t)$, полагая, как всегда, $f(t)\doteqdot\overline{f(s)}$. Имеем

$$f(\alpha t)\doteqdot\int\limits_0^\infty e^{-st} f(\alpha t)\,dt.$$

Здесь, исходя из оценок $|f(t)|<Me^{\sigma_0 t}$, $|f(\alpha t)|<Me^{\alpha\sigma_0 t}$, следует положить $\operatorname{Re}|s|=\sigma\geqslant\sigma_1>\alpha\sigma_0$.

Совершим в интеграле Лапласа замену переменной интегрирования, полагая

$$\alpha t=\tau,\ dt=\frac{1}{\alpha}\,d\tau;$$

находим

$$f(\alpha t) \doteqdot \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-s\frac{\tau}{\alpha}}\,f(\tau)\,d\tau=\frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{\alpha}\tau} f(\tau)\,d\tau.$$

Но последний интеграл в правой части предыдущего равенства отличается от интеграла Лапласа, определяющего $\overline{f(s)}$, лишь тем, что аргумент изображения s заменен на $\frac{s}{\alpha}$. Поэтому предыдущее равенство может быть записано в виде

$$f(\alpha t) \doteqdot \frac{1}{\alpha}\,\overline{f\left(\frac{s}{\alpha}\right)}.$$

Таким образом, мы приходим к теореме подобия: из соотношения $f(t) \doteqdot \overline{f(s)}$ при $\alpha>0$ следует

$$f(\alpha t) \doteqdot \frac{1}{\alpha}\,\overline{f\left(\frac{s}{\alpha}\right)}. \qquad (2;\ 5;\ 1)$$

Для дальнейшего нам понадобится изображение единичной функции, которое легко находится при помощи интеграла Лапласа

$$u(t) \doteqdot \overline{u(s)}=\int_0^\infty e^{-st}\,u(t)\,dt=\int_0^\infty e^{-st}dt=$$

$$=-\frac{1}{s}\,e^{-st}\Big|_0^\infty=\frac{1}{s}$$

(поскольку в данном случае $\operatorname{Re}(s)>0$, так как для функции $u(t)$ можно положить $\sigma_0=0$).

Итак,

$$u(t) \doteqdot \frac{1}{s}. \qquad (2;\ 5;\ 2)$$

Отсюда следует (см. § 1, формулу (2; 1; 1), что изображением постоянной (точнее функции $cu(t)$) служит функция $\frac{c}{s}$

$$cu(t) \doteqdot \frac{c}{s}. \qquad (2;\ 5;\ 3)$$

Связь между начальным значением оригинала и конечным значением изображения

В равенстве (2; 5; 1) устремим α к нулю:

$$\lim_{\alpha\to 0} f(\alpha t) \doteqdot \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{\alpha} \overline{f\left(\frac{s}{\alpha}\right)}. \qquad (2;\ 5;\ 4)$$

Но $\lim f(\alpha t)=f(0)$ и по формуле (2; 5; 3) изображением постоянной $f(0)$ служит $\frac{f(0)}{s}$, т. е.

$$f(0) \doteqdot \frac{f(0)}{s}. \qquad (2;\ 5;\ 5)$$

С другой стороны, имеем

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{\alpha} \overline{f\left(\frac{s}{\alpha}\right)} = \frac{1}{s} \lim_{\alpha\to 0} \frac{s}{\alpha} \overline{f\left(\frac{s}{\alpha}\right)} = \frac{1}{s} \lim_{s_1\to\infty} s_1 \overline{f(s_1)} \qquad (2;\ 5;\ 6)$$

(здесь положено $\frac{s}{\alpha}=s_1$, при $\alpha\to 0$ $s_1\to\infty$, оставаясь в правой полуплоскости, поскольку $\alpha>0$).

Итак, равенство (2; 5; 4) можно переписать в виде

$$f(0) \doteqdot \frac{1}{s} \lim_{s\to\infty} s\overline{f(s)} \qquad (2;\ 5;\ 7)$$

(мы отбросили индекс «1» в обозначении аргумента под знаком предела в правой части последнего равенства, что не существенно). Сопоставление равенств (2; 5; 5) и (2; 5; 7) и дает нам требуемое равенство, составляющее содержание теоремы о связи начального значения оригинала с конечным значением изображения:

$$f(0) = \lim_{s\to\infty} s\overline{f(s)}. \qquad (2;\ 5;\ 8)$$

Связь конечного значения оригинала с начальным значением изображения

Если для оригинала $f(t)$ существует конечный предел $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = f(\infty)$, то для него можно принять $\sigma_0 \leqslant 0$, и нулевая точка плоскости комплексного переменного s будет находиться либо в области регулярности изображения $\overline{f(s)}$, либо на ее границе, в силу чего как в правой, так и в левой частях равенства (2; 5; 1) возможен предельный переход при $\alpha \to +\infty$. При этих условиях имеем при $\alpha \to +\infty$

$$\lim_{\alpha\to+\infty} f(\alpha t) \doteqdot \lim_{\alpha\to+\infty} \frac{1}{\alpha} \overline{f\left(\frac{s}{\alpha}\right)}. \qquad (2;\ 5;\ 9)$$

Аналогично предыдущему, имеем $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} f(\alpha t) = f(\infty)$, причем

$$f(\infty) \doteqdot \frac{1}{s} f(\infty) \qquad (2;\ 5;\ 10)$$

(поскольку $f(\infty)$ — постоянная).

Кроме того, имеем

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{\alpha}\overline{f\left(\frac{s}{\alpha}\right)}=\frac{1}{s}\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{s}{\alpha}\overline{f\left(\frac{s}{\alpha}\right)}=$$

$$=\frac{1}{s}\lim_{s_1\to 0}s_1\overline{f(s_1)} \qquad (2;\ 5;\ 11)$$

$\left(\text{когда}\quad \alpha\to+\infty,\ \frac{s}{\alpha}=s_1\to 0\right)$.

Сопоставляя равенства (2; 5; 9), (2; 5; 10) и (2; 5; 11), приходим к равенству

$$f(\infty)=\lim_{s\to 0}s\overline{f(s)}, \qquad (2;\ 5;\ 12)$$

которое и составляет содержание теоремы о связи конечного значения оригинала $f(t)$ с начальным значением изображения.

Подчеркнем, что эта теорема применима не ко всяким оригиналам $f(t)$, а лишь к оригиналам, удовлетворяющим условию: существует конечный предел

$$\lim_{t\to+\infty}f(t)=f(\infty).$$

§ 6. Дифференцирование и интегрирование операционных соотношений по параметру

Интегрирование по параметру

Допустим, что оригиналом служит функция $f(t, \alpha)$, зависящая от параметра α, которая для значений α, принадлежащих отрезку $[\alpha_1, \alpha_2]$, является непрерывной функцией от α. Если для всех значений α, принадлежащих этому отрезку, второе условие изображаемости выполне-

но равномерно, т. е. если при $t>0\,|f(t,\alpha)|<Me^{\sigma_0 t}$, где M и σ_0 от α не зависят, то интеграл Лапласа от функции $f(t,\alpha)$ будет по отношению к α равномерно сходящимся на отрезке $[\alpha_1, \alpha_2]$. В силу соответствующего свойства интегралов, зависящих от параметра (см. § 1 введения), изображение данного оригинала можно будет интегрировать по параметру α на отрезке $[\alpha_1, \alpha_2]$ (или любой его части) под знаком интеграла Лапласа, т. е.

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \overline{f(s,\alpha)}\,d\alpha = \int_0^{\infty} e^{-st}dt \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(t,\alpha)\,d\alpha. \qquad (2;\ 6;\ 1)$$

Это показывает, что при оговоренных условиях, операционное соотношение

$$f(t,\alpha) \doteqdot \overline{f(s,\alpha)}$$

можно на отрезке $[\alpha_1, \alpha_2]$ или любой его части интегрировать по параметру α:

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(t,\alpha)\,d\alpha \doteqdot \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \overline{f(s,\alpha)}\,d\alpha. \qquad (2;\ 6;\ 2)$$

Дифференцирование по параметру

Если оригинал $f(t,\alpha)$ будет на отрезке $[\alpha_1, \alpha_2]$ дифференцируем по параметру α и его производная $f'_\alpha(t,\alpha)$ будет также являться оригиналом, причем для всех α, принадлежащих отрезку $[\alpha_1, \alpha_2]$, будет выполнено условие $|f'_\alpha(t,\alpha)|<M_1e^{\sigma'_0 t}$, где M_1 и σ'_0 от α не зависят, то на этом отрезке будет равномерно сходиться относительно α интеграл Лапласа от функции $f'_\alpha(t,\alpha)$. В этом случае

(см. § 1 введения) изображение данного оригинала можно будет дифференцировать на отрезке $[\alpha_1, \alpha_2]$ по параметру α под знаком интеграла Лапласа, иными словами:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\overline{f(s, \alpha)} = \int_0^\infty e^{-st} f'_\alpha(t, \alpha)\, dt. \qquad (2; 6; 3)$$

Это показывает, что при оговоренных условиях, операционное соотношение $f(t, \alpha) \doteqdot \overline{f(s, \alpha)}$ можно на отрезке $[\alpha_1, \alpha_2]$ дифференцировать по параметру

$$f'_\alpha(t, \alpha) \doteqdot \frac{\partial}{\partial \alpha}\overline{f(s, \alpha)}. \qquad (2; 6; 4)$$

Примеры применения некоторых из доказанных в этой главе теорем даны в следующей главе.

§ 7. Переход к пределу в операционных соотношениях

Пусть имеется бесконечная последовательность оригиналов $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., $f_n(t)$, ..., равномерно сходящаяся на любом конечном отрезке оси ot к оригиналу $f(t)$. Если существуют такие две постоянные $M > 0$ и $\sigma_0 \geqq 0$, что все эти оригиналы (включая и $f(t)$) одновременно удовлетворяют при $t > 0$ неравенствам

$$|f_n(t)| < Me^{\sigma_0 t}, \quad |f(t)| < Me^{\sigma_0 t}; \qquad (2; 7; 1)$$

то последовательность изображений этих оригиналов $\overline{f_n(s)}$ сходится к $\overline{f(s)}$ — изображению $f(t)$: $\lim_{n\to\infty} \overline{f_n(s)} = \overline{f(s)}$.

Иными словами, при выполнении указанных условий * справедливо операционное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) \doteqdot \lim_{n\to\infty} \overline{f_n(s)}. \qquad (2;\ 7;\ 2)$$

Докажем это.

В силу равномерной сходимости последовательности оригиналов на любом конечном отрезке оси ot имеем при всяком фиксированном T и произвольно малом положительном $\eta>0$:

$$|f_n(t)-f(t)|<\eta \text{ при } n>N(\eta) \text{ и } 0<t\leqslant T. \quad (2;\ 7;\ 3)$$

С другой стороны, в силу неравенств (2; 7; 1) имеем следующие оценки при $\operatorname{Re}(s)\geqslant\sigma_1>\sigma_0$:

$$\left|\int_T^\infty e^{-st} f_n(t)\,dt\right| \leqslant M\int_T^\infty e^{-\sigma_1 t}e^{\sigma_0 t}\,dt = \frac{Me^{-(\sigma_1-\sigma_0)T}}{\sigma_1-\sigma_0}$$

и, аналогично,

$$\left|\int_T^\infty e^{-st} f(t)\,dt\right| \leqslant \frac{Me^{-(\sigma_1-\sigma_0)T}}{\sigma_1-\sigma_0}. \qquad (2;\ 7;\ 4)$$

Очевидно, можно выбрать T настолько большим, чтобы при фиксированном $\sigma_1>\sigma_0$ и произвольном малом положительном ε выполнялись неравенства

$$\left|\int_T^\infty e^{-st} f_n(t)\,dt\right| < \varepsilon, \left|\int_T^\infty e^{-st} f(t)\,dt\right| < \varepsilon. \quad (2;\ 7;\ 5)$$

---

* Эти условия достаточны для существования данного операционного соотношения. Вопроса о том, какие условия для этого необходимы, мы касаться не будем.

Выбрав, таким образом, T и зафиксировав его, оценим теперь интеграл

$$\int_0^T e^{-st}\{f_n(t)-f(t)\}\,dt.$$

Имеем при $\operatorname{Re}(s)=\sigma\geqslant\sigma_1>\sigma_0$ в силу неравенств (2; 7; 3):

$$\left|\int_0^T e^{-st}\{f_n(t)-f(t)\}\,dt\right|\leqslant\int_0^T e^{-\sigma t}\left|f_n(t)-\right.$$

$$\left.-f(t)\right|dt\leqslant\int_0^T e^{-\sigma t}\eta\,dt=\frac{\eta}{\sigma}(1-e^{-\sigma T})<\frac{\eta}{\sigma}<\varepsilon. \quad (2;\ 7;\ 6)$$

(Можчо считать $\sigma>0$ и, в силу произвола η, принять $\eta<$ $<\sigma\varepsilon$.) Отсюда приходим к следующей оценке для модуля разности $\overline{f_n(s)}-\overline{f(s)}$:

$$\left|\overline{f_n(s)}-\overline{f(s)}\right|=\left|\int_0^\infty e^{-st}\{f_n(t)-f(t)\}\,dt\right|=$$

$$=\left|\int_0^T e^{-st}\{f_n(t)-f(t)\}\,dt+\int_T^\infty e^{-st}\{f_n(t)-f(t)\}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_0^T e^{-st}\{f_n(t)-f(t)\}\,dt\right|+\left|\int_T^\infty e^{-st}f_n(t)\,dt\right|+$$

$$+\left|\int_T^\infty e^{-st}f(t)\,dt\right|<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon$$

(использованы оценки (2; 7; 5) и (2; 7; 6)).

Полученная оценка доказывает, что

$$\lim_{n\to\infty} \overline{f_n(s)} = \overline{f(s)}.$$

Таким образом, при выполнении наложенных достаточных условий выполняется операционное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) \doteq \lim_{n\to\infty} \overline{f_n(s)}. \qquad (2;\ 7;\ 2)$$

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ИЗОБРАЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Изображения основных элементарных функций

В силу 1-го условия изображаемости все рассматриваемые в операционном исчислении функции равны тождественно нулю при $t<0$. Поэтому в операционном исчислении следовало бы писать не $\frac{t^n}{n!}$, $e^{\alpha t}$, $\sin \beta t, \ldots$, а

$$u(t)\frac{t^n}{n!},\ u(t)e^{\alpha t},\ u(t)\sin\beta t\ldots$$

Но для облегчения записи множитель $u(t)$ обычно опускают, сохраняя за всеми функциями их обычное обозначение с учетом, что все эти функции при $t<0$ тождественно равны нулю *.

---

* Во избежание недоразумений при обозначении оригиналов, являющихся соответствующими функциями запаздывающего аргумента, опускать этот множитель — единичную функцию — не рекомендуется. Так, для обозначения оригинала показательной функции запаздывающего аргумента с запаздыванием τ следует пользоваться записью $u(t-\tau)\,e^{\alpha(t-\tau)}$, а не записью $e^{\alpha(t-\tau)}$. Последнюю легко спутать с записью оригинала незапаздывающего аргумента $e^{-\alpha\tau}e^{\alpha t}$ содержащего постоянный множитель $e^{-\alpha\tau}$ и отличного от нуля при $t>0$.

В § 5, гл. 2 мы нашли изображение единичной функции

$$u(t) \doteqdot \frac{1}{s}. \qquad (3;\ 1;\ 1)$$

Применим к операционному соотношению (3; 1; 1) теорему дифференцирования изображения (формула (2; 2; 4) гл. 2). Найдем

$$(-1)^n t^n u(t) \doteqdot (-1)^n \frac{n!}{s^{n+1}},$$

или, сокращая общий множитель $(-1)^n$, деля обе части полученного соотношения на $n!$ и опуская, согласно принятой договоренности, множитель $u(t)$, находим операционное соотношение

$$\frac{t^n}{n!} \doteqdot \frac{1}{s^{n+1}}. \qquad (3;\ 1;\ 2)$$

Применим к операционным соотношениям (3; 1; 1) и (3; 1; 2) теорему смещения (формула (2; 3; 1) гл. 2).

Найдем (опуская множитель $u(t)$)

$$e^{\alpha t} \doteqdot \frac{1}{s-\alpha}, \qquad (3;\ 1;\ 3)$$

$$\frac{t^n}{n!} e^{\alpha t} \doteqdot \frac{1}{(s-\alpha)^{n+1}}. \qquad (3;\ 1;\ 4)$$

Используя формулу Эйлера $\sin \beta t = \frac{e^{\beta i t} - e^{-\beta i t}}{2i}$, формулу (3; 1; 3) (при $\alpha = \pm \beta i$) и свойство линейности преобразования Лапласа (см. § 1, гл. 2), найдем изображе-

ние $\sin\beta t$:

$$\sin\beta t = \frac{e^{\beta it} - e^{-\beta it}}{2i} \doteqdot \frac{1}{2i}\left\{\frac{1}{s-\beta i} - \frac{1}{s+\beta i}\right\} = \frac{\beta}{s^2+\beta^2};$$

$$\sin\beta t \doteqdot \frac{\beta}{s^2+\beta^2}. \qquad (3;\ 1;\ 5)$$

Аналогично, используя формулы

$$\cos\beta t = \frac{e^{\beta it} + e^{-\beta it}}{2}, \quad \operatorname{sh}\beta t = \frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2},$$

$$\operatorname{ch}\beta t = \frac{e^{\beta t} + e^{-\beta t}}{2},$$

найдем следующие операционные соотношения:

$$\cos\beta t \doteqdot \frac{s}{s^2+\beta^2}, \qquad (3;\ 1;\ 6)$$

$$\operatorname{sh}\beta t \doteqdot \frac{\beta}{s^2-\beta^2}, \qquad (3;\ 1;\ 7)$$

$$\operatorname{ch}\beta t \doteqdot \frac{s}{s^2-\beta^2}. \qquad (3;\ 1;\ 8)$$

Применяя к операционным соотношениям (3; 1; 5) и (3; 1; 6) теорему смещения, найдем изображения функций $e^{\alpha t}\sin\beta t$ и $e^{\alpha t}\cos\beta t$:

$$e^{\alpha t}\sin\beta t \doteqdot \frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}, \qquad (3;\ 1;\ 9)$$

$$e^{\alpha t}\cos\beta t \doteqdot \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}. \qquad (3;\ 1;\ 10)$$

Снова используя формулы Эйлера и исходя теперь уже из формулы (3; 1; 4), найдем изображения функции

$\frac{t^n}{n!}\sin\beta t$ и $\frac{t^n}{n!}\cos\beta t$:

$$\frac{t^n}{n!}\sin\beta t = \frac{t^n}{n!}\frac{e^{\beta i t} - e^{-\beta i t}}{2i} \doteqdot \frac{1}{2i}\left\{\frac{1}{(s-\beta i)^{n+1}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(s+\beta i)^{n+1}}\right\} = \frac{1}{2i}\frac{(s+\beta i)^{n+1} - (s-\beta i)^{n+1}}{(s^2+\beta^2)^{n+1}}.$$

Числителю последней дроби можно придать иной вид, если условно рассматривать s как вещественное число. Тогда разность $(s+\beta i)^{n+1} - (s-\beta i)^{n+1}$ будет разностью двух сопряженных комплексных чисел и поэтому будет равна $2i\,\widetilde{\mathrm{Im}}\,\{(s+\beta i)^{n+1}\}$*.

Таким образом, приходим к соотношению

$$\frac{t^n}{n!}\sin\beta t = \frac{\widetilde{\mathrm{Im}}\,\{(s+\beta i)^{n+1}\}}{(s^2+\beta^2)^{n+1}}. \qquad (3;\ 1;\ 11)$$

Аналогично найдем

$$\frac{t^n}{n!}\cos\beta t \doteqdot \frac{\widetilde{\mathrm{Re}}\,\{(s+\beta i)^{n+1}\}}{(s^2+\beta^2)^{n+1}}. \qquad (3;\ 1;\ 12)$$

Применяя еще раз теорему смещения к двум последним операционным соотношениям, находим

$$\frac{t^n}{n!}e^{\alpha t}\sin\beta t \doteqdot \frac{\widetilde{\mathrm{Im}}\,\{[(s-\alpha)+\beta i]^{n+1}\}}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^{n+1}}, \qquad (3;\ 1;\ 13)$$

$$\frac{t^n}{n!}e^{\alpha t}\cos\beta t \doteqdot \frac{\widetilde{\mathrm{Re}}\,\{[(s-\alpha)+\beta i]^{n+1}\}}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^{n+1}}. \qquad (3;\ 1;\ 14)$$

---

* Обозначениями $\widetilde{\mathrm{Im}}$ и $\widetilde{\mathrm{Re}}$ подчеркивается, что мнимая и вещественная части соответствующего комплексного многочлена берутся условные (т. е. считая s вещественным числом).

§ 2. Расширение класса оригиналов. Изображение степенной функции (при произвольном показателе степени) и натурального логарифма

Класс оригиналов может быть расширен за счет функций, которые в конечном числе точек на положительной оси ot обращаются в бесконечность, но так, что интеграл Лапласа от такой функции (который будет теперь несобственным интегралом как первого, так и второго рода) остается сходящимся. Для таких функций 2-е условие изображаемости примет следующий вид:

если все точки разрыва второго рода функций $f(t)$ лежат на отрезке $[0, t_1]$, то для значений $t \geqslant N > t_1$ должно выполняться условие

$$|f(t)| < Me^{\sigma_0 t}.$$

Условие же сходимости интеграла Лапласа будет теперь дополнительным, 4-м условием изображаемости. Можно доказать, что на такие оригиналы распространяются все теоремы операционного исчисления, доказанные нами в гл. 2. Доказательство этого утверждения опустим, так как оно потребует более строгого обоснования интеграла Фурье. Принимая это утверждение без доказательства, заключаем, что теперь к числу оригиналов можно отнести функцию t^{μ} (при произвольном вещественном $\mu > -1$), а также функции $\ln t$ и $t^{\mu}\ln t$, поскольку интеграл Лапласа от этих функций будет сходящимся.

Найдем изображения этих функций. Для функции t^{μ} $(\mu > -1)$

$$t^{\mu} \doteqdot \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\mu} dt,$$

полагая в интеграле $st=y$, $t=\frac{y}{s}$, $dt=\frac{dy}{s}$, приходим к следующему результату:

$$t^{\mu} \doteqdot \frac{1}{s^{\mu+1}} \int_{0}^{\infty} e^{-y} y^{\mu} dy.$$

Но если $\operatorname{Re}\{y\}>0$, то $\int_{0}^{\infty} e^{-y} y^{\mu} dy = \Gamma(\mu+1)$, где $\Gamma(\mu+1)$ — гамма-функция Эйлера (см. Введение, § 3, п. 5). Таким образом, приходим к соотношению

$$t^{\mu} \doteqdot \frac{\Gamma(\mu+1)}{s^{\mu+1}} \quad (\text{при } \mu>-1), \qquad (3;\ 2;\ 1)$$

или, деля обе части этого соотношения на постоянный множитель $\Gamma(\mu+1)$, находим окончательно

$$\frac{t^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)} \doteqdot \frac{1}{s^{\mu+1}}. \qquad (3;\ 2;\ 2)$$

Отметим, что формула (3; 1; 2) предыдущего параграфа, определяющая изображение функции $\frac{t^{n}}{n!}$, является частным случаем формулы (3; 2; 2), когда $\mu=n$ (n — целое положительное число), поскольку $\Gamma(n+1)=n!$. Применим к операционному соотношению (3; 2; 1) теорему дифференцирования по параметру (гл. 2, § 6, формула (2; 6; 4), найдем

$$t^{\mu} \ln t \doteqdot \frac{\Gamma'(\mu+1)}{s^{\mu+1}} - \frac{\Gamma(\mu+1)}{s^{\mu+1}} \ln s,$$

или, деля обе части на $\Gamma(\mu+1)$, приходим к операционному соотношению

$$\frac{t^{\mu}\ln t}{\Gamma(\mu+1)} \doteqdot \frac{1}{s^{\mu+1}}\left[\frac{\Gamma'(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)} - \ln s\right]. \qquad (3;\ 2;\ 3)$$

Полагая в этом соотношении $\mu=0$, учитывая (см. Введение, § 3), что $\Gamma(1)=1$, $\Gamma'(1)=-\gamma$ (постоянная Эйлера), получим

$$\ln t \doteqdot -\frac{\ln s+\gamma}{s}. \qquad (3;\ 2;\ 4)$$

Применяя теорему смещения к операционным соотношениям (3; 2; 2) — (3; 2; 4), приходим к следующему:

$$\frac{t^{\mu}e^{\alpha t}}{\Gamma(\mu+1)} \doteqdot \frac{1}{(s-\alpha)^{\mu+1}}, \qquad (3;\ 2;\ 5)$$

$$\frac{t^{\mu}e^{\alpha t}\ln t}{\Gamma(\mu+1)} \doteqdot \frac{1}{(s-\alpha)^{\mu+1}}\left[\frac{\Gamma'(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)} - \ln(s-\alpha)\right], \qquad (3;\ 2;\ 6)$$

$$e^{\alpha t}\ln t \doteqdot -\frac{\gamma+\ln(s-\alpha)}{s-\alpha}. \qquad (3;\ 2;\ 7)$$

Примечание. Заметим, что в формулах (3; 2; 1)—(3; 2; 3) под функцией комплексного переменного $\frac{1}{s^{\mu+1}}$ понимается та из ветвей этой многозначной функции, которая на вещественной положительной оси плоскости s принимает вещественные значения; иными словами,

$$\frac{1}{s^{\mu+1}} = e^{-(\mu+1)\ln s}, \qquad (3;\ 2;\ 8)$$

где $\ln s$ — главное значение натурального логарифма комплексной переменной s. Аналогичное замечание относится и к формулам (3; 2; 5) и (3; 2; 6).

§ 3. Применение основных теорем операционного исчисления к отысканию изображений некоторых неэлементарных функций

Очень часто теоремы интегрирования оригинала и изображения позволяют найти изображения функций, определяемых интегралами от элементарных функций, не выражающихся через элементарные функции. Рассмотрим несколько примеров.

1. Пусть требуется найти изображение функции

$$F(t)=\int_0^t \frac{e^\tau-1}{\tau}\,d\tau.$$

Прежде всего найдем изображение e^t-1. Это изображение равно

$$\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}.$$

Поскольку $\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1$, функция $\frac{e^t-1}{t}$ является оригиналом и для отыскания ее изображения следует применить теорему интегрирования изображения (см. формулу (2; 2; 5), гл. 2, § 2)

$$\frac{e^t-1}{t}\doteqdot\int_s^\infty\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}\right)ds=\left\{\ln\frac{s-1}{s}\right\}\Big|_0^\infty=-\ln\left(1-\frac{1}{s}\right).$$

Для отыскания изображения $\int_0^t \frac{e^\tau-1}{\tau}\,d\tau$ остается применить теорему интегрирования оригинала (формула 2; 2; 3), § 2, гл. 2)

$$\int_0^t \frac{e^\tau-1}{\tau}\,d\tau\doteqdot-\frac{1}{s}\ln\left(1-\frac{1}{s}\right). \qquad (3;\ 3;\ 1)$$

2. Найдем изображение функции $F(t)=\int\limits_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau$.

Так как $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$, то функция $\frac{\sin t}{t}$ является оригиналом. Поступая так же, как в первом примере, находим последовательно

$$\sin t \doteqdot \frac{1}{s^2+1}, \quad \frac{\sin t}{t} \doteqdot \int\limits_s^\infty \frac{ds}{s^2+1} = -\int\limits_s^\infty \frac{d\left(\frac{1}{s}\right)}{1+\left(\frac{1}{s}\right)^2} =$$

$$= -\operatorname{arctg}\frac{1}{s}\Big|_s^\infty = \operatorname{arctg}\frac{1}{s},$$

$$\int\limits_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau \doteqdot \frac{1}{s}\operatorname{arctg}\frac{1}{s}. \qquad (3;\ 3;\ 2)$$

3. Найдем изображение функции $F(t)=\int\limits_0^t \frac{\sin^2\tau}{\tau^2}\,d\tau$.

Находим последовательно

$$\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2} \doteqdot \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}\right];$$

так как $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{t}=0$, $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{t^2}=1$,

то можно применять два раза подряд теорему интегрирования изображения:

$$\frac{\sin^2 t}{t} \doteqdot \frac{1}{2}\int\limits_s^\infty \left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right] ds = \frac{1}{2}\ln\frac{s}{\sqrt{s^2+4}}\Bigg|_s^\infty =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{s^2+4}}{s} \quad \left(\text{так как } \lim_{s\to\infty}\ln\frac{\sqrt{s^2+4}}{s} = 0\right);$$

$$\frac{\sin^2 t}{t^2} \doteqdot \frac{1}{2}\int\limits_s^\infty \ln\frac{\sqrt{s^2+4}}{s} ds = \frac{1}{2} s\ln\frac{\sqrt{s^2+4}}{s}\Bigg|_s^\infty -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_s^\infty s\left\{\frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{s}\right\} ds = \frac{1}{2} s\ln\frac{\sqrt{s^2+4}}{s}\Bigg|_s^\infty +$$

$$+2\int\limits_s^\infty \frac{ds}{s^2+4} = \frac{1}{2} s\frac{\ln\sqrt{s^2+4}}{s}\Bigg|_s^\infty - \int\limits_s^\infty \frac{d\left(\frac{2}{s}\right)}{1+\left(\frac{2}{s}\right)^2} =$$

$$= \left[\frac{1}{2} s\ln\frac{\sqrt{s^2+4}}{s} - \operatorname{arctg}\frac{2}{s}\right]_s^\infty = \operatorname{arctg}\frac{2}{s} - \frac{s}{2}\ln\frac{\sqrt{s^2+4}}{s}$$

$$\left(\text{так как } \lim_{s\to\infty} s\ln\frac{\sqrt{s^2+4}}{s} = 0 \text{ и } \lim_{s\to\infty}\operatorname{arctg}\frac{2}{s} = 0\right).$$

Остается применить теорему интегрирования оригинала

$$\int\limits_0^t \frac{\sin^2\tau}{\tau^2} d\tau \doteqdot \frac{1}{s}\operatorname{arctg}\frac{2}{s} - \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{s^2+4}}{s}. \quad (3;\ 3;\ 3)$$

4. Найдем изображение интеграла вероятностей

$$\Phi(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t e^{-\frac{\tau^2}{2}}d\tau.$$

Для этого предварительно найдем изображение функции $e^{-\frac{t^2}{2}}$:

$$e^{-\frac{t^2}{2}} \doteqdot \int_0^\infty e^{-st-\frac{t^2}{2}}dt=e^{\frac{s^2}{2}}\int_0^\infty e^{\frac{-(s+t)^2}{2}}dt.$$

В последнем интеграле сделаем замену переменной, полагая $s+t=\tau$; пределы интегрирования по τ станут s и ∞,

$$e^{-\frac{t^2}{2}} \doteqdot e^{\frac{s^2}{2}}\int_s^\infty e^{-\frac{\tau^2}{2}}d\tau, \text{ но } \int_0^s e^{-\frac{\tau^2}{2}}d\tau=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Phi(s);$$

$$\int_s^\infty e^{-\frac{\tau^2}{2}}d\tau=\int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{2}}d\tau-\int_0^s e^{-\frac{\tau^2}{2}}d\tau=\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Phi(s)$$

(здесь $\Phi(s)$ — интеграл вероятностей от аргумента s).

Итак, находим

$$e^{-\frac{t^2}{2}} \doteqdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{s^2}{2}}\{1-\Phi(s)\}. \qquad (3;\ 3;\ 4)$$

Отсюда, умножая на $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ и применяя теорему интегрирования оригинала, находим изображение интеграла ве-

роятностей

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t e^{-\frac{\tau^2}{2}}d\tau = \Phi(t) \doteqdot \frac{1}{s}e^{\frac{s^2}{2}}\{1-\Phi(s)\}. \quad (3;\ 3;\ 5)$$

§ 4. Изображение периодического оригинала

Пусть требуется найти изображение периодического оригинала $f(t)$ с периодом $2l$ (при $t>0$, $f(t+2l)=f(t)$).

Введем вспомогательную функцию $f_0(t)$, определенную следующим образом: на полуотрезке $[0, 2l)$, $f_0(t) =$

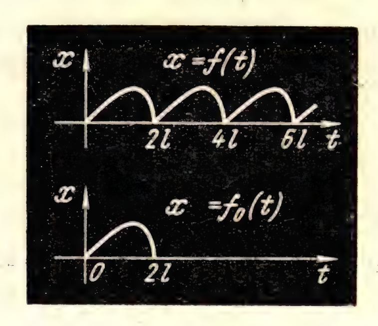


Рис. 9

$=f(t)$. Вне этого полуотрезка $f_0(t)\equiv 0$ (рис. 9). Ее изображением будет служить функция $\overline{f_0(s)}$, определяемая следующим образом:

$$f_0(t) \doteqdot \overline{f_0(s)} = \int_0^\infty e^{-st} f_0(t)\,dt = \int_0^{2l} e^{-st} f(t)\,dt \quad (3;\ 4;\ 1)$$

(так как при $t > 2l$ $f_0(t) \equiv 0$, а при $0 < t < 2l$ $f_0(t) \equiv$ $\equiv f(t)$. Но функцию $f(t)$ в свою очередь можно выразить через $f_0(t)$ следующим образом (напомним, что $f(t)$ оригинал и, как всякий оригинал, равен нулю при $t < 0$):

$$f(t) = f_0(t) + f(t - 2l) \qquad (3;\ 4;\ 2)$$

(здесь $f(t - 2l)$ — та же периодическая функция, но с запаздыванием на один период, равная нулю при $t < 2l$).

Переходя в равенстве (3; 4; 2) к изображениям и используя теорему запаздывания, получаем

$$\overline{f(s)} = \overline{f_0(s)} + e^{-2ls}\overline{f(s)}.$$

Отсюда находим $\overline{f(s)} = \dfrac{\overline{f_0(s)}}{1 - e^{-2ls}}$.

Таким образом, изображение периодической функции $f(t)$ с периодом $2l$ определяется следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} & f(t) \doteqdot \overline{f(s)} = \frac{\overline{f_0(s)}}{1 - e^{-2ls}}, \\ & \text{где } \overline{f_0(s)} = \int_0^{2l} e^{-st} f(t)\, dt. \end{aligned} \right\} \qquad (3;\ 4;\ 3)$$

В качестве примера применения этой формулы найдем изображение функции $|\sin t|$.

Так как период функции $|\sin t|$ равен π, применяя вторую из формул (3; 4; 3), находим $\overline{f_0(s)}$:

$$\overline{f_0(s)} = \int_0^{\pi} e^{-st} |\sin t|\, dt = \int_0^{\pi} e^{-st} \sin t\, dt,$$

поскольку на отрезке $[0, \pi]$ $\sin t \geqslant 0$ и поэтому $|\sin t| = \sin t$.

Но

$$\int e^{\alpha t} \sin \beta t dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha \sin \beta t - \beta \cos \beta t) + c,$$

поэтому

$$\int_0^\pi e^{-st} \sin t\, dt = \frac{e^{-st}}{s^2+1}(-s \sin t - \cos t)\Big|_0^\pi = \frac{1+e^{-\pi s}}{1+s^2}.$$

Таким образом, $\overline{f_0(s)} = \frac{1+e^{-\pi s}}{1+s^2}$.

Отсюда по первой формуле (3; 4; 3) находим окончательно

$$|\sin t| \doteqdot \frac{1+e^{-\pi s}}{1-e^{-\pi s}} \frac{1}{s^2+1} = \frac{\operatorname{cth}\frac{\pi s}{2}}{s^2+1} \qquad (3;\ 4;\ 4)$$

$$\left(\text{поскольку } \frac{1+e^{-\pi s}}{1-e^{-\pi s}} = \frac{e^{-\frac{\pi s}{2}}\left(e^{\frac{\pi s}{2}} + e^{-\frac{\pi s}{2}}\right)}{e^{-\frac{\pi s}{2}}\left(e^{\frac{\pi s}{2}} - e^{-\frac{\pi s}{2}}\right)} = \frac{\operatorname{ch}\frac{\pi s}{2}}{\operatorname{sh}\frac{\pi s}{2}} = \operatorname{cth}\frac{\pi s}{2}\right).$$

§ 5. Изображение кусочно-аналитического оригинала

Кусочно-аналитическим оригиналом мы будем называть функцию $f(t)$, определенную следующим образом.

1. При $t<\tau_1$ $f(t)=0$ $(\tau_1 \geqslant 0)$.

2. На отрезке $\tau_k \leqslant t \leqslant \tau_{k+1}$ $f(t)=f_k(t)$.

3. При $t>\tau_{m+1}$ $f(t)=0$.

Здесь $k=1, 2, ..., m$; функция $f_k(t)$ — аналитическая на отрезке $[\tau_k, \tau_{k+1}]$, т. е. может на этом отрезке быть разложена в сходящийся к ней ряд Тейлора. В частности, эта функция на отрезке $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ представима рядами

$$f_k(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_k^{(n)}(\tau_k)}{n!}(t-\tau_k)^n, \qquad (3;\ 5;\ 1)$$

$$f_k(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_k^{(n)}(\tau_{k+1})}{n!}(t-\tau_{k+1})^n. \qquad (3;\ 5;\ 1')$$

Число m, в частности, может быть равно бесконечности. В этом случае предполагается, что при $t>T$ выполняется неравенство

$$|f(t)|<Me^{\sigma_0 t}.$$

Заметим, что определенная таким образом кусочно-аналитическая функция удовлетворяет всем условиям изображаемости.

Для отыскания изображения запишем функцию $f(t)$ следующим образом:

$$f(t)=\sum_{j=1}^{m}[u(t-\tau_j)-u(t-\tau_{j+1})]\,f_j(t). \qquad (3;\ 5;\ 2)$$

Нетрудно убедиться в справедливости этого равенства; в самом деле, на каждом отрезке $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ оси ot отличен от нуля только один член суммы, стоящей в правой части равенства (3; 5; 2), а именно тот, для которого $j=k$; поскольку $\tau_k<t<\tau_{k+1}$,

$$u(t-\tau_k)=1, \; u(t-\tau_{k+1})=0$$

и соответствующий член суммы обращается в $f_k(t)$:

$$[u(t-\tau_k)-u(t-\tau_{k+1})]\, f_k(t) \equiv f_k(t).$$

Если $j<k$, то $t>\tau_{j+1}>\tau_j$, поэтому $u(t-\tau_j)=1$ и $u(t-\tau_{j+1})=1$ и соответствующий член суммы (3; 5; 2) обращается в нуль. Наконец, если $j>k$, то $t<\tau_j<\tau_{j+1}$, поэтому $u(t-\tau_j)=0$ и $u(t-\tau_{j+1})=0$ и соответствующий член суммы тоже равен нулю. Таким образом, на отрезке $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ имеем $f(t)=f_k(t)$. В «узлах» $\tau_k\,(k=1, 2, \ldots)$ функция $f(t)$ имеет правые и левые производные любого порядка, причем как сама функция, так и все ее производные в этих узлах претерпевают разрыв непрерывности первого рода. Введем для «скачка» производной $f^{(n)}(t)$ в узле τ_k обозначение

$$\Delta f^{(n)}(\tau_k)=f^{(n)}(\tau_k+0)-f^{(n)}(\tau_k-0); \qquad (3;\ 5;\ 3)$$

но

$$f^{(n)}(\tau_k+0)=f_k^{(n)}(\tau_k); \; f^{(n)}(\tau_k-0)=f_{k-1}^{(n)}(\tau_k)$$

(поскольку слева от точки τ_k имеем $f(t)=f_{k-1}(t)$, а справа от нее $f(t)=f_k(t)$). Отсюда следует

$$\Delta f^{(n)}(\tau_k)=f_k^{(n)}(\tau_k)-f_{k-1}^{(n)}(\tau_k). \qquad (3;\ 5;\ 4)$$

Равенство (3; 5; 2) перепишем в следующем виде:

$$f(t)=\sum_{j=1}^{m} u(t-\tau_j)\, f_j(t)-\sum_{j=1}^{m} u(t-\tau_{j+1})\, f_j(t). \qquad (3;\ 5;\ 5)$$

В первом члене правой части заменим $f_j(t)$ ее разложением (3; 5; 1), во втором члене — ее разложением (3; 5; 1′), заменяя в каждом из них k на j; найдем

$$f(t)=\sum_{j=1}^{m} u(t-\tau_j)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_j^{(n)}(\tau_j)}{n!}(t-\tau_j)^n-$$

$$-\sum_{j=1}^{m} u(t-\tau_{j+1})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_j^{(n)}(\tau_{j+1})}{n!}(t-\tau_{j+1})^n. \quad (3;\ 5;\ 6)$$

Учитывая, что $f(t)\equiv 0$ слева от точки $t=\tau_1$ и справа от точки $t=\tau_{m+1}$, положим $f_0(t)\equiv 0$, $f_{m+1}(t)\equiv 0$, и в равенстве (3; 5; 6) будем вести суммирование в первом слагаемом от 1 до $m+1$, а во втором — от 0 до m (в силу принятых соглашений это сумм не изменит). Кроме того, во втором слагаемом правой части равенства (3; 5; 6) изменим индекс суммирования, полагая $j=j^*-1$, тогда суммирование в нем будет вестись не от нуля до m, а от $j^*=1$ до $j^*=m+1$, и равенство (3; 5; 6) можно будет записать в виде

$$f(t)=\sum_{j=1}^{m+1} u(t-\tau_j)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_j^{(n)}(\tau_j)}{n!}(t-\tau_j)^n-$$

$$-\sum_{j^*=1}^{m+1} u(t-\tau_{j^*})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_{j^*-1}^{(n)}(\tau_{j^*})}{n!}(t-\tau_{j^*})^n. \quad (3;\ 5;\ 7)$$

Отбрасывая звездочку в индексе суммирования второго слагаемого, объединяем обе суммы в одну

$$f(t)=\sum_{j=1}^{m+1} u(t-\tau_j)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_j^{(n)}(\tau_j)-f_{j-1}^{(n)}(\tau_j)}{n!}(t-\tau_j)^n,$$

или в силу формулы (3; 5; 4) находим окончательно

$$f(t)=\sum_{j=1}^{m+1} u(t-\tau_j)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Delta f^{n}(\tau_j)}{n!}(t-\tau_j)^n=$$

$$=\sum_{j=1}^{m+1}\sum_{n=0}^{\infty}\Delta f^{(n)}(\tau_j)\,u(t-\tau_j)\frac{(t-\tau_j)^n}{n!}. \quad (3;\ 5;\ 8)$$

Представление кусочно-аналитического оригинала в виде (3; 5; 8) позволяет сразу найти его изображение, пользуясь теоремой запаздывания и формулой (3; 1; 2) для изображения функций $\frac{t^n}{n!}$

$$f(t)\doteqdot\overline{f(s)}=\sum_{j=1}^{m+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Delta f^{(n)}(\tau_j)}{s^{n+1}}e^{-s\tau_j}. \quad (3;\ 5;\ 9)$$

При применении этой формулы следует помнить, что в силу условия $f_0(t)=0$ для скачков $\Delta f^{(n)}(\tau_1)$ по формуле (3; 5; 4) имеем

$$\Delta f^{(n)}(\tau_1)=f_1^{(n)}(\tau_1)-f_0^{(n)}(\tau_1)=f_1^{(n)}(\tau). \quad (3;\ 5;\ 10)$$

Поскольку же $f_{m+1}(t)\equiv 0$, то для скачков $\Delta f^{(n)}(\tau_{m+1})$ получим значения

$$\Delta f^{(n)}(\tau_{m+1})=f_{m+1}^{(n)}(\tau_{m+1})-f_m^{(n)}(\tau_{m+1})=-f_m^{(n)}(\tau_{m+1}). \quad (3;\ 5;\ 11)$$

Рассмотрим пример. Функция $f(t)$ задана следующим образом:

$$f(t)=t^2 \quad \text{на } [0, 1],$$
$$f(t)=2-(t-2)^2 \quad \text{на } [1, 2],$$
$$f(t)=2 \quad \text{на } [2, 4],$$
$$f(t)=2-(t-4)^2 \quad \text{на } [4, 5],$$
$$f(t)=(t-6)^2 \quad \text{на } [5, 6],$$

при $t>6$ $f(t)\equiv 0$ (график $x=f(t)$ изображен на рис. 10).

Легко видеть, что как сама функция $f(t)$, так и ее первая производная $f'(t)$ непрерывны во всех точках «стыка» $t=0, 1, 2, 4, 5, 6$. Вторая производная в этих точках имеет следующие скачки:

$$\Delta f''(0)=\Delta f''(2)=2; \quad \Delta f''(4)=\Delta f''(6)=-2;$$
$$\Delta f''(1)=-4; \quad \Delta f''(5)=4.$$

Все дальнейшие производные $f(t)$ равны нулю.

По формуле (3; 5; 9) находим следующее изображение $f(t)$:

$$\overline{f(s)}=\frac{2}{s^3}\left[1-2e^{-s}+e^{-2s}-e^{-4s}+2e^{-5s}-e^{-6s}\right]=$$
$$=\frac{2}{s^3}(1-e^{-s})^2(1-e^{-4s}). \qquad (3;\ 5;\ 12)$$

Формулой (3; 5; 9) для изображения кусочно-аналитической функции целесообразно пользоваться, вообще говоря, только в том случае, когда график этой функции состоит из конечного или бесконечного числа отрезков прямых и парабол (любого порядка); в этом случае внут-

ренняя сумма в формуле (3; 5; 9) автоматически обрывается на членах, содержащих наивысшие, отличные от нуля, производные функции $f(t)$.

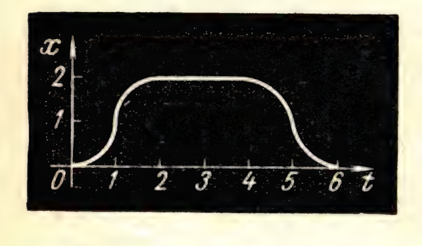


Рис. 10

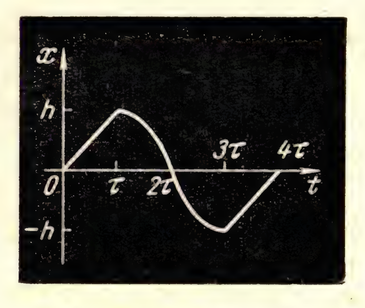


Рис. 11

Если же график кусочно-аналитической функции составлен (хотя бы частично) из отрезков графиков бесконечно-дифференцируемых функций с отличными от нуля производными любых порядков, то для отыскания изображения такой функции иногда оказывается более целесообразным использовать представление этой функции в форме (3; 5; 2), т. е. в виде

$$f(t)=\sum_{j=1}^{m}[u(t-\tau_j)-u(t-\tau_{j+1})]\,f_j(t). \qquad (3;\ 5;\ 2)$$

Покажем это на следующем примере. График функции $f(t)$ составлен из отрезков двух прямых и дуги синусоиды (рис. 11)

$$f(t)=\frac{h}{\tau}t \qquad \text{при } 0\leqslant t\leqslant\tau;$$

$$f(t)=h\sin\frac{\pi t}{2\tau} \qquad \text{при } \tau\leqslant t\leqslant 3\tau;$$

$$f(t)=\frac{h}{\tau}(t-4\tau) \qquad \text{при } 3\tau\leqslant t\leqslant 4\tau;$$

$$f(t)\equiv 0 \qquad \text{при } t>4\tau.$$

По формуле (3; 5; 2) имеем

$$f(t)=[u(t)-u(t-\tau)]\frac{h}{\tau}t+[u(t-\tau)-u(t-3\tau)]h\sin\frac{\pi t}{2\tau}+$$
$$+[u(t-3\tau)-u(t-4\tau)]\left\{\frac{h}{\tau}(t-4\tau)\right\}.$$

Перепишем $f(t)$ в новом виде, учитывая следующие очевидные преобразования:

1) $\frac{h}{\tau}t=h+\frac{h}{\tau}(t-\tau)$,

2) $h\sin\frac{\pi t}{2\tau}=h\sin\frac{\pi}{2\tau}[(t-\tau)+\tau]=$

$$=h\sin\left[\frac{\pi}{2\tau}(t-\tau)+\frac{\pi}{2}\right]=h\cos\frac{\pi(t-\tau)}{2\tau}$$

и, аналогично,

3) $h\sin\frac{\pi t}{2\tau}=-h\cos\frac{\pi}{2\tau}(t-3\tau)$,

4) $\frac{h}{\tau}(t-4\tau)=-h+\frac{h}{\tau}(t-3\tau)$.

Внося эти выражения в предыдущую запись $f(t)$ так, чтобы при каждой единичной функции стояла множите-

лем функция того же аргумента, и собирая затем члены, содержащие множителями единичные функции одного и того же аргумента, приводим $f(t)$ к следующему виду:

$$f(t) = u(t)\cdot\frac{h}{\tau}t - hu(t-\tau)\left\{1 + \frac{1}{\tau}(t-\tau) - \right.$$

$$\left. - \cos\frac{\pi(t-\tau)}{2\tau}\right\} - hu(t-3\tau)\left\{1 - \frac{1}{\tau}(t-3\tau) - \right.$$

$$\left. - \cos\frac{\pi}{2\tau}(t-3\tau)\right\} - hu(t-4\tau)\cdot\frac{(t-4\tau)}{\tau}.$$

Такая запись $f(t)$, в которой при каждой единичной функции $u(t-\lambda\tau)$ стоит множителем функция того же аргумента $t-\lambda\tau$, позволяет немедленно, используя теорему запаздывания, найти изображение функции $f(t)$:

$$f(t) \doteqdot \overline{f(s)} = \frac{h}{\tau}\cdot\frac{1}{s^2} - he^{-\tau s}\left[\frac{1}{s} + \frac{1}{\tau s^2} - \frac{s}{s^2 + \frac{\pi^2}{4\tau^2}}\right] -$$

$$- he^{-3\tau s}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{\tau s^2} - \frac{s}{s^2 + \frac{\pi^2}{4\tau^2}}\right] - he^{-4\tau s}\cdot\frac{1}{\tau s^2},$$

или, окончательно,

$$\overline{f(s)} = \frac{h}{\tau s^2}(1 - e^{-\tau s} + e^{-3\tau s} - e^{-4\tau s}) -$$

$$- \frac{h}{s}(e^{-\tau s} + e^{-3\tau s}) + \frac{hs}{s^2 + \frac{\pi^2}{4\tau^2}}(e^{-\tau s} + e^{3\tau s}).$$

§ 6. Изображение полигональной функции

Полигональной функцией называется кусочно-аналитическая функция, для которой все ее «элементы» — функции $f_k(t)$ — линейные функции: $f_k(t) = a_k t + b_k$.

Таким образом, график полигональной функции составлен из отрезков прямых (рис. 12). Для скачков функ-

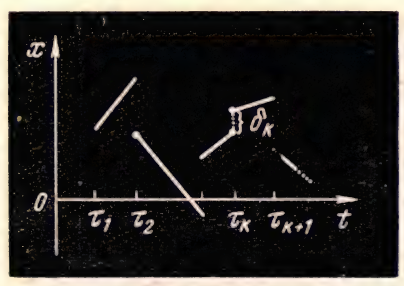


Рис. 12

ции $f(t)$ в узлах «стыка» введем обозначения:

$$\Delta f(\tau_k) = (a_k \tau_k + b_k) - (a_{k-1} \tau_k + b_{k-1}) = \delta_k,$$

$$\Delta f'(\tau_k) = a_k - a_{k-1} = \alpha_k$$

(при этом $\delta_1 = a_1 \tau_1 + b_1$, $\alpha_1 = a_1$, поскольку при $t < \tau$ $f(t) = f_0(t) \equiv 0$). Поэтому изображение полигональной функции запишется на основании формулы (3; 5; 9) следующим образом:

$$\overline{f(s)} = \sum_{k=1}^{m+1} \left\{ \frac{\delta_k}{s} + \frac{\alpha_k}{s^2} \right\} e^{-\tau_k s}. \qquad (3;\ 6;\ 1)$$

Здесь, как и раньше, принято, что при $t > \tau_{m+1}$ $f_{m+1}(t) \equiv 0$, т. е. график полигональной функции состоит из m отрез-

ков прямых; для скачка в точке $t = \tau_{m+1}$ следует положить поэтому

$$\delta_{m+1} = -(a_m \tau_{m+1} + b_m); \quad \alpha_{m+1} = -a_m.$$

Пример. Найти изображение полигональной функции, график которой задан на рис. 13.

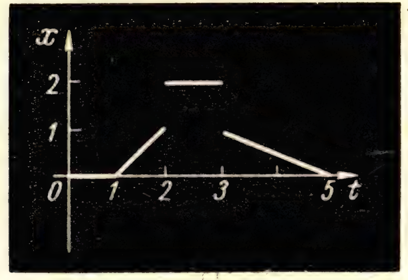


Рис. 13

В данном случае нет необходимости записывать уравнения прямых, отрезки которых образуют заданный график. Непосредственно по рисунку определяем δ_k и α_k:

в точке $\tau_1 = 1$: $\delta_1 = 0$, $\alpha_1 = 1$,

» $\tau_2 = 2$: $\delta_2 = 1$, $\alpha_2 = -1$,

» $\tau_3 = 3$: $\delta_3 = -1$, $\alpha_3 = -\frac{1}{2}$,

» $\tau_4 = 5$: $\delta_4 = 0$, $\alpha_4 = \frac{1}{2}$.

Поэтому имеем по формуле (3; 6; 2)

$$\overline{f(s)} = \frac{1}{s}\left(e^{-2s} - e^{-3s}\right) + \frac{1}{s^2}\left(e^{-s} - e^{-2s} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}e^{-3s} + \frac{1}{2}e^{-5s}\right). \qquad (3;\ 6;\ 2)$$

Частным случаем полигональной функции является ступенчатая функция, график которой образован из конечного или бесконечного числа отрезков прямых, парал-

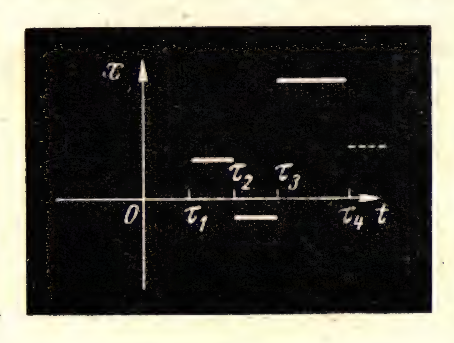


Рис. 14

лельных оси ot (рис. 14). Для ступенчатой функции, сохраняя обозначения, принятые для полигональных функций, имеем все $\alpha_k = 0$. Поэтому формула (3; 6; 1) приводится к виду

$$\overline{f(s)} = \sum_{k=1}^{m+1} \frac{\delta_k}{s} e^{-\tau_k s}, \qquad (3;\ 6;\ 3)$$

причем следует помнить, что число ступенек не $m+1$, а m и $\delta_{m+1} = -h_m$, где h_m — ордината последней ступеньки.

Пример. Найти изображение ступенчатой функции, график которой приведен на рис. 15.

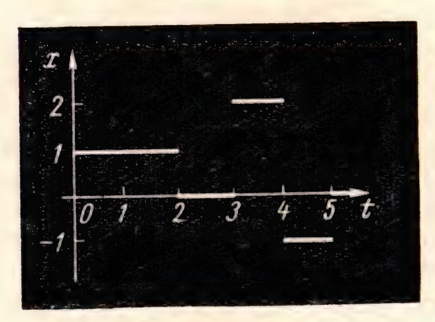


Рис. 15

По рисунку имеем:

$$
\begin{array}{lll}
\text{в точке} & \tau_1 = 0 & \delta_1 = 1, \\
\text{»} & \tau_2 = 2 & \delta_2 = -1, \\
\text{»} & \tau_3 = 3 & \delta_3 = 2, \\
\text{»} & \tau_4 = 4 & \delta_4 = -3, \\
\text{»} & \tau_5 = 5 & \delta_5 = 1.
\end{array}
$$

По формуле (3; 6; 3) изображение данной ступенчатой функции записываем в виде

$$\overline{f(s)} = \frac{1}{s}\left[1 - e^{-2s} + 2e^{-3s} - 3e^{-4s} + e^{-5s}\right]. \quad (3;\ 6;\ 4)$$

Формулы (3; 6; 1) и (3; 6; 3) остаются в силе, если число звеньев m на графике полигональной функции или число ступенек m на графике ступенчатой функции будет бесконечно большим.

§ 7. Отыскание изображений при помощи рядов

Пусть функция $f(t)$ разлагается в степенной ряд на всей оси ot:

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad -\infty<t<\infty. \qquad (3;\ 7;\ 1)$$

Пусть, кроме того, коэффициенты разложения a_n при всех n удовлетворяют условию

$$|a_n|<M\frac{\sigma_0^n}{n!}, \qquad (3;\ 7;\ 2)$$

где σ_0 — некоторая положительная постоянная. Тогда функция, совпадающая с $f(t)$ при $t\geqslant 0$ и равная нулю при $t<0$ (сохраним для нее то же обозначение $f(t)$), является оригиналом и ее изображение может быть найдено как сумма ряда

$$\overline{f(s)}=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\frac{n!}{s^{n+1}}, \qquad (3;\ 7;\ 3)$$

члены которого являются изображениями соответствующих членов ряда (3; 7; 1).

Докажем это. Прежде всего, в силу оценки (3; 7; 2) имеем при $t\geqslant 0$

$$|f(t)|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|t^n<M\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sigma_0 t)^n}{n!}=Me^{\sigma_0 t}.$$

Эта оценка доказывает, что функция $f(t)$ является оригиналом.

Докажем теперь, что ряд (3; 7; 3) абсолютно сходится при $|s|>\sigma_0$. Рассмотрим частичную сумму n первых членов ряда модулей членов ряда (3; 7; 3) и используем снова оценку (3; 7; 2):

$$\sum_{k=0}^{k=n}|a_k|\frac{k!}{|s|^{k+1}}\leqslant M\sum_{k=0}^{k=n}\frac{k!}{|s|^{k+1}}\cdot\frac{\sigma_0^k}{k!}=\frac{M}{|s|}\sum_{k=0}^{k=n}\left(\frac{\sigma_0}{|s|}\right)^k.$$

Эта оценка показывает, что ряд (3; 7; 3) сходится при $|s|>\sigma_0$. Переходя же к пределу при $n\to\infty$ в операционном соотношении *

$$\sum_{k=0}^{k=n}a_kt^k\doteqdot\sum_{k=0}^{k=n}a_k\frac{k!}{s^{k+1}},$$

находим

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kt^k\doteqdot\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{k!}{s^{k+1}}=\overline{f(s)}.$$

Пример. Найти изображение функции Бесселя первого рода с нулевым индексом $J_0(t)$, разложение которой, пригодное для всех значений t, имеет вид

$$J_0(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$$

---

* Степенные ряды сходятся внутри интервала сходимости равномерно, поэтому условия, оговоренные в § 7, гл. 2, выполнены и переход к пределу в этом операционном соотношении законен.

Условие (3; 7; 2) выполнено; в самом деле $a_{2n-1}=0$, а для $|a_{2n}|$ имеем оценку

$$|a_{2n}|=\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}=\frac{1}{[2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n]^2}=$$

$$=\frac{1\cdot 2\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\cdot\frac{1}{(2n)!}<\frac{1}{(2n)!}\,.$$

Итак, $|a_{2n}|<M\frac{\sigma_0^{2n}}{(2n)!}$, где $M=1$ и $\sigma_0=1$. Используя доказанную теорему, находим изображение $J_0(t)$ — функцию $\overline{J_0(s)}$:

$$\overline{J_0(s)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n!}{2^{2n}(n!)^2 s^{2n+1}}=$$

$$=\frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\cdot\frac{1}{s^{2n}}\,.$$

Нетрудно убедиться, что в правой части стоит разложение по степеням $\frac{1}{s}$ функции $\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$, которое пригодно при $|s|>1$; в самом деле

$$\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}=\frac{1}{s}\cdot\left(1+\frac{1}{s^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\cdot\frac{1}{s^{2n}}\,.$$

Итак, окончательно приходим к операционному соотношению

$$J_0(t) \doteqdot \overline{J_0(s)} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}.$$

Упражнения

1. Найти изображения следующих функций:

а) $f(t) = t^2 \sin 2t$. *Ответ:* $\overline{f(s)} = \dfrac{12s^2 - 16}{(s^2+4)^3}$;

б) $f(t) = t \cos \dfrac{t}{2}$. *Ответ:* $\overline{f(s)} = \dfrac{16s^2 - 4}{(4s^2+1)^2}$;

в) $f(t) = \dfrac{t^2}{2} \operatorname{sh} t$. *Ответ:* $\overline{f(s)} = \dfrac{3s^2+1}{(s^2-1)^3}$;

г) $f(t) = te^{-2t} \sin 3t$ *Ответ:* $\overline{f(s)} = \dfrac{6s+12}{[(s+2)^2+9]^2}$;

д) $f(t) = \dfrac{t^2}{2} e^t \cos t$. *Ответ:* $\overline{f(s)} = \dfrac{s^3 - 3s + 2}{(s^2 - 2s + 2)^3}$.

2. Найти изображения следующих функций:

а) $f(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau}\, d\tau$. *Ответ:* $\overline{f(s)} = \dfrac{1}{s} \ln\left(1 + \dfrac{1}{s}\right)$;

б) $f(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{\operatorname{sh}\tau}{\tau}\, d\tau$. *Ответ:* $\overline{f(s)} = \dfrac{1}{2s} \ln \dfrac{s+1}{s-1}$;

в) $f(t)=\int\limits_0^t \frac{\operatorname{ch}\tau-1}{\tau^2}\,d\tau.$ *Ответ:* $\overline{f(s)}=\frac{1}{2s}\ln\frac{s+1}{s-1}+$

$$+\ln\frac{\sqrt{s^2-1}}{s}.$$

3. Найти изображения периодических функций, заданных графиками на рис. 16, 17, 18 и 19. Результат проверить, используя формулы для кусочно-аналитических, полигональных и ступенчатых функций.

Ответ:

$$\overline{f(s)}=\frac{h}{\tau s^2}\operatorname{th}\frac{\tau s}{2};$$

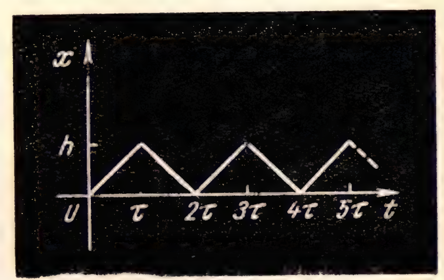


Рис. 16

Ответ:

$$\overline{f(s)}=$$

$$=\frac{h}{s\left(1+e^{-\tau s}\right)};$$

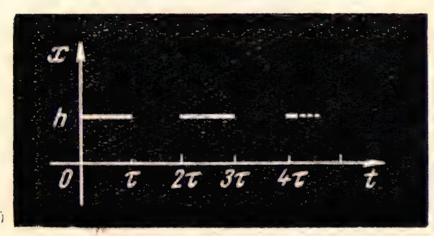


Рис. 17

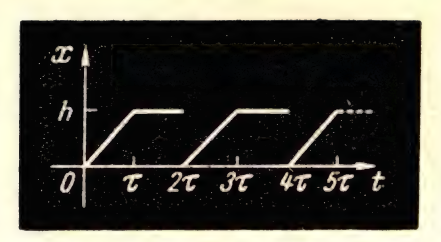


Рис. 18

Ответ: $\overline{f(s)} = \frac{h}{\tau s^2} \cdot \frac{1}{1 + e^{-\tau s}} - \frac{h}{s} \cdot \frac{e^{-2\tau s}}{1 - e^{-2\tau s}}$;

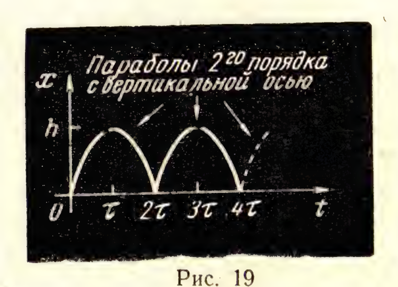


Рис. 19

Ответ: $\overline{f(s)} = \frac{2h}{\tau s^2} \operatorname{cth} \tau s - \frac{2h}{\tau^2 s^3}$.

4. Найти изображения кусочно-аналитических, полигональных и ступенчатых функций, заданных графиками (см. рис. 20, 21, 22 и 23):

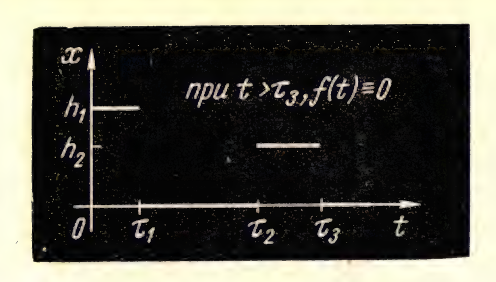


Рис. 20

Ответ: $\overline{f(s)} = \frac{h_1}{s}(1 - e^{-\tau_1 s}) + \frac{h_2}{s}(e^{-\tau_2 s} - e^{-\tau_3 s});$

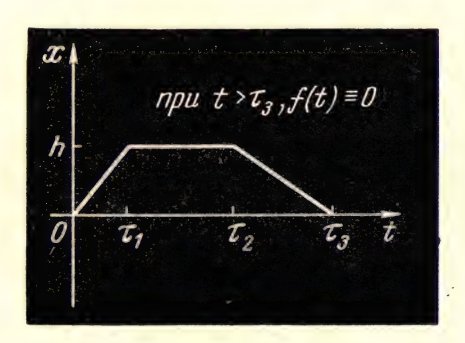


Рис. 21

Ответ: $\overline{f(s)} = \frac{h}{s^2}\left[\frac{1}{\tau_1}(1 - e^{-\tau_1 s}) - \frac{1}{\tau_3 - \tau_2}(e^{-\tau_2 s} - e^{-\tau_3 s})\right];$



Рис. 22

Ответ: $\overline{f(s)} = \frac{2h}{\tau s^2}(1 - e^{-6\tau s}) - \frac{2h}{\tau^2 s^3}(1 - 2e^{-2\tau s} + 2e^{-4\tau s} - e^{-6\tau s})$;



Рис. 23

Ответ: $f(t) = hu(t)\sin\frac{\pi t}{2\tau} - hu(t-\tau)\left\{\cos\frac{\pi(t-\tau)}{2\tau} - 1 + \frac{t-\tau}{\tau}\right\} + hu(t-3\tau)\left\{1 + \frac{t-3\tau}{\tau} - \cos\frac{\pi(t-3\tau)}{2\tau}\right\} - hu(t-4\tau)\sin\frac{\pi(t-4\tau)}{2\tau}$.

$$\overline{f(s)} = \frac{h\frac{\pi}{2\tau}}{s^2+\frac{\pi^2}{4\tau^2}}(1-e^{-4\tau s}) - \frac{hs}{s^2+\frac{\pi^2}{4\tau^2}}(e^{-\tau s}+e^{-3\tau s}) +$$

$$+\frac{h}{s}(e^{-\tau s}+e^{-3\tau s}) - \frac{h}{\tau s^2}(e^{-\tau s}-e^{-3\tau s}).$$

5. Пользуясь теоремой § 7, найти изображения следующих функций Бесселя:

а) $J_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2^{2n+1}\, n!\,(n+1)!}$.

Ответ: $\overline{J_1(s)} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}\,(s+\sqrt{s^2+1})} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{s^2}}}$;

б) $I_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$ (функция Бесселя первого рода чисто мнимого аргумента с нулевым индексом).

Ответ: $\overline{I_0(s)} = \frac{1}{\sqrt{s^2-1}}$;

в) $I_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n+1}}{2^{2n+1} n!\,(n+1)!}$.

Ответ: $\overline{I_1(s)} = \frac{1}{\sqrt{s^2-1}\,(s+\sqrt{s^2-1})}$.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

МЕТОДЫ ОТЫСКАНИЯ ОРИГИНАЛА ПО ИЗВЕСТНОМУ ИЗОБРАЖЕНИЮ; ТЕОРЕМЫ РАЗЛОЖЕНИЯ

Для отыскания оригинала по известному изображению в операционном исчислении используются так называемые теоремы разложения и, когда это возможно, теорема свертывания оригиналов.

§ 1. Первая теорема разложения

Пусть требуется найти оригинал для изображения $\overline{f(s)}$, которое для значений s, удовлетворяющих неравенству $\frac{1}{|s|} < \rho$, разлагается в сходящийся к нему степенной ряд по отрицательным степеням s:

$$\overline{f(s)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{s^{k+1}} . \qquad (4;\ 1;\ 1)$$

Используя формулу (3; 1; 2), формально можно сразу записать оригинал функции $\overline{f(s)}$ для значений $t>0$ в виде ряда

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{t^k}{k!} , \qquad (4;\ 1;\ 2)$$

полагая, что при $t<0$, $f(t)=0$. Но нужно доказать, что этот формально найденный ряд действительно определяет оригинал функции $\overline{f(s)}$. Для этого нужно убедиться в справедливости следующих трех положений.

1. Ряд в правой части равенства (4; 1; 2) сходится для всех t, т. е. на всей оси ot.

2. Его сумма $f(t)$ удовлетворяет второму условию изображаемости

$$|f(t)|<Me^{\sigma_0 t}.$$

3. Между функциями $f(t)$ и $\overline{f(s)}$ имеется операционное соотношение

$$f(t) \doteq \overline{f(s)}.$$

Докажем эти положения.

Поскольку ряд (4; 1; 1) является рядом Лорана для функции $\overline{f(s)}$ и он сходится при $|s|>\frac{1}{\rho}$, то при всяком s из области сходимости в силу необходимого признака сходимости имеем $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{|c_k|}{|s|^{k+1}}=0$. Но тогда все члены ряда для любого значения s, удовлетворяющего неравенству $|s|\geqslant\frac{1}{\varrho_1}>\frac{1}{\varrho}$, в свою очередь, должны удовлетворять неравенству

$$\frac{|c_k|}{|s|^{k+1}}\leqslant|c_k|\,\rho_1^{k+1}\leqslant M, \qquad (4;\ 1;\ 3)$$

где M — некоторая положительная постоянная. Из неравенства (4; 1; 3) находим оценку модулей коэффициентов ряда (4; 1; 1): $|c_k|\leqslant\frac{M}{\rho_1^{k+1}}$, а поскольку ρ_1

можно взять сколь угодно близким к ρ, отсюда вытекает и оценка

$$|c_k| \leqslant \frac{M}{\varrho^{k+1}} . \qquad (4;\ 1;\ 4)$$

Отсюда следует, что абсолютные величины членов ряда (4; 1; 2), формально определяющего оригинал, удовлетворяют оценке (при $t>0$)

$$\left| c_k \frac{t^k}{k!} \right| \leqslant \frac{M}{\varrho^{k+1}} \cdot \frac{t^k}{k!} .$$

Но ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M}{\varrho^{k+1}} \cdot \frac{t^k}{k!} = \frac{M}{\varrho} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{t}{\varrho} \right)^k$ сходится на всей оси ot и его сумма равна $\frac{M}{\varrho} e^{\frac{t}{\varrho}}$. Это доказывает, что и ряд (4; 1; 2) сходится на всей оси ot и его сумма $f(t)$ не превосходит по абсолютному значению суммы мажорантного ряда, т. е.

$$|f(t)| < \frac{M}{\varrho} e^{\frac{t}{\varrho}} . \qquad (4;\ 1;\ 5)$$

Таким образом, первое и второе из требующих доказательства положений доказаны. Для доказательства третьего напишем операционное соотношение (вытекающее из свойств линейности преобразования Лапласа), справедливое при любом n

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{s^{k+1}} \risingdotseq \sum_{k=0}^{n} c_k \frac{t^k}{k!} . \qquad (4;\ 1;\ 6)$$

Если в этом операционном соотношении положить $|s| > \frac{1}{\rho}$, то в силу равномерной сходимости обоих степенных рядов по доказанному в § 7, гл. 2, можно здесь перейти к пределу при $n \to \infty$, — тем самым убедиться в справедливости третьего, требовавшего доказательства положения

$$\overline{f(s)} \doteqdot f(t). \qquad (4;\ 1;\ 7)$$

Тем самым мы полностью доказали первую теорему разложения.

Пусть *изображение* $\overline{f(s)}$ *разлагается в ряд по отрицательным степеням* s, *сходящийся для значений* s, *удовлетворяющих неравенству* $|s| > \frac{1}{\varrho}$, *т. е.*

$$\overline{f(s)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{s^{k+1}}.$$

Тогда оригиналом для функций $\overline{f(s)}$ *служит функция* $f(t)$, *определяемая при* $t > 0$ *сходящимся на всей оси ot рядом,*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{t^k}{k!}.$$

При этом второе условие изображаемости для функции $f(t)$ выполняется в виде

$$|f(t)| < \frac{M}{\varrho} e^{\frac{t}{\varrho}}.$$

Пример. Найти оригинал для функции $\overline{f(s)} = \frac{1}{s} e^{-\frac{1}{s}}$.

Функция $\overline{f(s)} = \frac{1}{s} e^{-\frac{1}{s}}$ разлагается на всей плоскости комплексного переменного s с выколотой нулевой точкой (для всех $s \neq 0$) в следующий ряд Лорана:

$$\frac{1}{s} e^{-\frac{1}{s}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\, s^{k+1}}. \qquad (4;\ 1;\ 8)$$

Поскольку условия первой теоремы разложения выполнены, оригиналом для этой функции служит функция

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^k}{(k!)^2}. \qquad (4;\ 1;\ 9)$$

Сумма этого ряда легко может быть выражена через функцию Бесселя первого ряда с нулевым индексом $J_0(z)$, разложение которой в ряд по степеням z имеет вид

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}. \qquad (4;\ 1;\ 10)$$

В самом деле, ряд (4; 1; 10) превращается в ряд (4; 1; 9) при $z = 2\sqrt{t}$. Таким образом $f(t) = J_0(2\sqrt{t})$, и мы приходим к операционному соотношению

$$J_0(2\sqrt{t}) \doteqdot \frac{1}{s} e^{-\frac{1}{s}}. \qquad (4;\ 1;\ 11)$$

§ 2. Вторая теорема разложения

Пусть требуется найти оригинал для изображения

$$\overline{f(s)}=\frac{P(s)}{Q(s)},$$

где $P(s)$ и $Q(s)$ — многочлены относительно s степени соответственно m и n $(m<n)$:

$$P(s)=a_0s^m+a_1s^{m-1}+\ldots+a_m;$$

$$Q(s)=s^n+b_1s^{n-1}+\ldots+b_n.$$

Допустим, что все корни знаменателя $Q(s)$ известны. Разлагая $Q(s)$ на линейные множители, запишем $\overline{f(s)}$ в виде

$$\overline{f(s)}=\frac{P(s)}{\prod\limits_{k=1}^{k=r}(s-s_k)^{\mu_k}}, \qquad (4;\ 2;\ 1)$$

где $\sum\limits_{k=1}^{k=r}\mu_k=n$, а числа s_k — различные вещественные или комплексные корни знаменателя. Разлагая правую часть равенства (4; 2; 1) на простейшие дроби, приходим к следующему представлению $\overline{f(s)}$:

$$\overline{f(s)}=\sum_{k=1}^{k=r}\sum_{j=1}^{j=\mu_k}\frac{A_{j,k}}{(s-s_k)^{\mu_k-j+1}}. \qquad (4;\ 2;\ 2)$$

Для определения коэффициентов $A_{j,k}$ этого разложения фиксируем некоторое значение k и умножим левую и

правую части равенства (4; 2; 2) на $(s-s_k)^{\mu_k}$. Выделяя в правой части члены, относящиеся к этому значению k, найдем

$$(s-s_k)^{\mu_k}\overline{f(s)}=\sum_{j=1}^{j=\mu_k}A_{j,k}(s-s_k)^{j-1}+$$

$$+(s-s_k)^{\mu_k}\sum_{l=1,\,l\neq k}^{l=r}\sum_{j=1}^{j=\mu_l}\frac{A_{j,l}}{(s-s_l)^{\mu_l-j+1}}.$$

Продифференцируем это равенство $j-1$ раз по s. Производные всех членов первой суммы, содержащих $(s-s_k)$ в степенях ниже $j-1$, обратятся в нули; производные же всех членов этой суммы, содержащих $(s-s_k)$ в степени j и выше, а также производные всех членов второй суммы будут содержать множитель $(s-s_k)$ в степени не ниже первой. Таким образом, найдем

$$\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}\left\{(s-s_k)^{\mu_k}\overline{f(s)}\right\}=(j-1)!\,A_{j,k}+(s-s_k)\,\varphi(s)$$

[здесь через $(s-s_k)\,\varphi(s)$ обозначена совокупность всех остальных членов в выражении производной].

Переходя в этом последнем равенстве к пределу при $s\to s_k$, найдем $A_{j,k}$

$$A_{j,k}=\frac{1}{(j-1)!}\lim_{s\to s_k}\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}\left\{(s-s_k)^{\mu_k}\overline{f(s)}\right\}. \quad (4;\ 2;\ 3)$$

Определив по формулам (4; 2; 3) все коэффициенты разложения (4; 2; 2), найдем оригинал для $\overline{f(s)}$ в виде

$$\overline{f(s)} \doteqdot f(t) = \sum_{k=1}^{k=r} \sum_{j=1}^{j=\mu_k} A_{j,k} \frac{t^{\mu_k - j}}{(\mu_k - j)!} e^{s_k t} \quad (4;\ 2;\ 4)$$

$\left(\text{поскольку } \dfrac{1}{(s-s_k)^{\mu_k - j + 1}} \doteqdot \dfrac{t^{\mu_k - j}}{(\mu_k - j)!} e^{s_k t}\right.$ — см. формулу (3; 1; 4) гл. 3). Формулы (4; 2; 1), (4; 2; 2), (4; 2; 3) и (4; 2; 4) в совокупности составляют содержание второй теоремы разложения.

В том случае, когда все корни знаменателя $Q(s)$ простые, разложение $\overline{f(s)}$ упрощается:

$$\overline{f(s)} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{A_k}{s - s_k}. \quad (4;\ 2;\ 5)$$

Коэффициенты этого разложения определяются формулами

$$A_k = \lim_{s \to s_k} \{(s - s_k)\overline{f(s)}\} = \frac{P(s_k)}{Q'(s_k)}. \quad (4;\ 2;\ 6)$$

Оригинал $f(t)$ находится по формуле

$$\overline{f(s)} \doteqdot f(t) = \sum_{k=1}^{k=n} A_k e^{s_k t} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{P(s_k)}{Q'(s_k)} e^{s_k t}. \quad (4;\ 2;\ 7)$$

Примеры. 1. Найти оригинал изображения $\overline{f(s)} = \dfrac{s^2 + s + 1}{s(s^4 - 1)}$.

Знаменатель изображения имеет простые корни $s_1 = 0$, $s_{2,3} = \pm 1$, $s_{4,5} = \pm i$. Коэффициенты разложения (4; 2; 5)

определяются формулами (4; 2; 6), в которых следует положить $P(s)=s^2+s+1$, $Q'(s)=5s^4-1$:

$$A_1=\frac{P(0)}{Q'(0)}=-1,\quad A_2=\frac{P(1)}{Q'(1)}=\frac{3}{4},\quad A_3=\frac{P(-1)}{Q'(-1)}=\frac{1}{4},$$

$$A_4=\frac{P(i)}{Q'(i)}=\frac{i}{4},\quad A_5=\frac{P(-i)}{Q'(-i)}=-\frac{i}{4}.$$

Отсюда по формуле (4; 2; 7) находим

$$f(t)=-1+\frac{3}{4}e^t+\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{i}{4}(e^{it}-e^{-it})=$$

$$=-1+\frac{1}{4}(3e^t+e^{-t})-\frac{1}{2}\sin t.$$

2. Найти оригинал изображения $\overline{f(s)}=\frac{s^2}{(s^2-1)^3}$.

Имеем $(s^2-1)^3=(s-1)^3(s+1)^3$, поэтому разложение $\overline{f(s)}$ будет иметь следующий вид:

$$\frac{s^2}{(s^2-1)^3}=\frac{A_{1,1}}{(s-1)^3}+\frac{A_{2,1}}{(s-1)^2}+\frac{A_{3,1}}{s-1}+$$

$$+\frac{A_{1,2}}{(s+1)^3}+\frac{A_{2,2}}{(s+1)^2}+\frac{A_{3,2}}{s+1}.$$

По формулам (4; 2; 3) находим коэффициенты разложения:

$$A_{1,1}=\frac{1}{0!}\lim_{s\to 1}\left\{(s-1)^3\frac{s^2}{(s^2-1)^3}\right\}=\lim_{s\to 1}\left[\frac{s^2}{(s+1)^3}\right]=\frac{1}{8},$$

$$A_{2,1}=\frac{1}{1!}\lim_{s\to 1}\frac{d}{ds}\left[\frac{s^2}{(s+1)^3}\right]=\lim_{s\to 1}\left[\frac{2s}{(s+1)^3}-\frac{3s^2}{(s+1)^4}\right]=\frac{1}{16},$$

$$A_{3,1}=\frac{1}{2!}\lim_{s\to 1}\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{s^2}{(s+1)^3}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{s\to 1}\left[\frac{2}{(s+1)^3}-\frac{12s}{(s+1)^4}+\frac{12s^2}{(s+1)^5}\right]=-\frac{1}{16}\,.$$

$$A_{1,2}=\frac{1}{0!}\lim_{s\to -1}\left\{(s+1)^3\frac{s^2}{(s^2-1)^3}\right\}=\lim_{s\to -1}\left[\frac{s^2}{(s-1)^3}\right]=-\frac{1}{8}\,,$$

$$A_{2,2}=\frac{1}{1!}\lim_{s\to -1}\frac{d}{ds}\left[\frac{s^2}{(s-1)^3}\right]=\lim_{s\to -1}\left[\frac{2s}{(s-1)^3}-\frac{3s^2}{(s-1)^4}\right]=\frac{1}{16}\,,$$

$$A_{3,2}=\frac{1}{2!}\lim_{s\to -1}\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{s^2}{(s-1)^3}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{s\to -1}\left[\frac{2}{(s-1)^3}-\frac{12s}{(s-1)^4}+\frac{12s^2}{(s-1)^5}\right]=\frac{1}{16}\,.$$

Окончательный вид разложения заданного изображения будет следующий:

$$\frac{s^2}{(s^2-1)^3}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(s-1)^3}+\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{(s-1)^2}-\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{s-1}-$$

$$-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(s+1)^3}+\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{s+1}\,.$$

Отсюда находим оригинал

$$\frac{s^2}{(s^2-1)^3}\doteqdot\frac{1}{8}\cdot\frac{t^2}{2}e^t+\frac{1}{16}te^t-\frac{1}{16}e^t-\frac{1}{8}\frac{t^2}{2}\cdot e^{-t}+$$

$$+\frac{1}{16}te^{-t}+\frac{1}{16}e^{-t},$$

или

$$\frac{s^2}{(s^2-1)^3}\doteqdot\frac{t^2-1}{8}\operatorname{sh}t+\frac{t}{8}\operatorname{ch}t.$$

§ 3. Третья теорема разложения (обобщенная)

Пусть требуется найти оригинал для изображения $\overline{f(s)}$. Относительно функции $\overline{f(s)}$ будем предполагать, что она однозначная функция комплексного переменного s, регулярная справа от прямой $\mathrm{Re}(s)=\sigma_0$, имеющая на плоскости s лишь конечное или счетное множество изолированных особых точек (полюсов или существенных особенностей), и что, кроме того, выполнены следующие условия.

1. Существует бесконечная возрастающая последовательность вещественных положительных чисел $R_1, R_2, \ldots, \ldots, R_n, \ldots, \lim_{n\to\infty} R_n=\infty$, таких, что для точек, лежащих на окружностях $|s|=R_n$, функция $\overline{f(s)}$ равномерно стремится к нулю при $n\to\infty$. Иными словами, каково бы ни было малое положительное число ε, существует такое $N=N(\varepsilon)$, что при $n>N(\varepsilon)$, во всех точках окружности $|s|=R_n$ выполняется неравенство $|\overline{f(s)}|<\varepsilon$. Это условие выполняется в левой полуплоскости (в которой лежат особые точки $\overline{f(s)}$). В правой же полуплоскости $\overline{f(s)}$ стремится к нулю равномерно при произвольном способе стремления s к бесконечности.

2. Функция $\overline{f(s)}$ абсолютно интегрируема вдоль всякой прямой $\mathrm{Re}(s)=\sigma$ при $\sigma\geqslant\sigma_1>\sigma_0$, иными словами,

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} |\overline{f(s)}|\,|ds|<\infty.$$

При выполнении этих условий оригинал $\overline{f(s)}$ может быть найден по формуле

$$\overline{f(s)} \risingdotseq f(t)=\sum \mathrm{Res}\,\{e^{st}\,\overline{f(s)}\}, \qquad (4;\ 3;\ 1)$$

где суммирование в правой части распространяется на все особые точки $\overline{f(s)}$.

Равенство (4; 3; 1) и составляет содержание 3-й (обобщенной) теоремы разложения.

Докажем эту теорему. Функция $\overline{f(s)}$ удовлетворяет всем условиям, при выполнении которых ее можно счи-

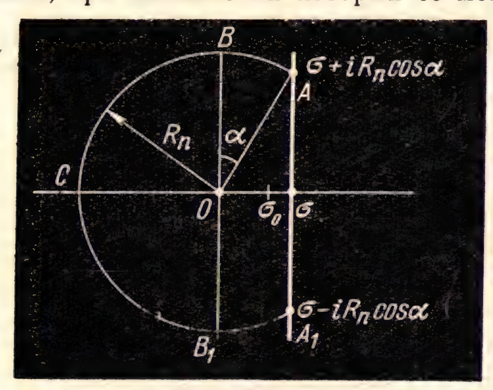


Рис. 24

тать изображением некоторого оригинала (см. гл. 1, § 2), поэтому ее оригинал можно найти по формуле обращения

$$\overline{f(s)} \doteqdot f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{st}\, \overline{f(s)}\, ds,$$

где $\sigma \geqslant \sigma_1 > \sigma_0$.

Для вычисления интеграла Римана — Меллина, стоящего в правой части последнего равенства, рассмотрим интеграл $\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_n} e^{st}\, \overline{f(s)}\, ds$, где замкнутый контур Γ_n

составлен из отрезка прямой $\mathrm{Re}(s)=\sigma$, лежащей внутри окружности $|s|=R_n$, и дуги этой окружности, расположенной слева от этой прямой (при этом окружность $|s|=R_n$ принадлежит семейству окружностей, фигурирующих в 1-м из вышеприведенных условий). Контур Γ_n изображен на рис. 24.

Покажем, что интеграл по дуге окружности $|s|=R_n$, входящей в состав контура Γ_n, стремится к нулю при $n\to\infty$, если $t>0$.

а) На дуге AB имеем

$$|\overline{f(s)}|<\varepsilon,\ |e^{st}|\leqslant e^{\sigma t},\ \lim_{n\to\infty}\frac{\overset{\smile}{AB}}{\sigma}=1.$$

В силу этого получаем равенство

$$\left|\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} e^{st}\,\overline{f(s)}\,ds\right|\leqslant e^{\sigma t}\varepsilon\,\overset{\smile}{AB}=e^{\sigma t}\varepsilon\sigma\cdot\frac{\overset{\smile}{AB}}{\sigma}.$$

Эта оценка показывает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} e^{st}\overline{f(s)}ds=0$, поскольку множитель $\sigma e^{\sigma t}$ остается постоянным, $\varepsilon\to 0$, а

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\overset{\smile}{AB}}{\sigma}=1.$

Аналогичную оценку имеет и интеграл по дуге B_1A_1.

б) На дуге BCB_1 имеем

$$|\overline{f(s)}|<\varepsilon,\ s=R_n(\cos\varphi+i\sin\varphi),\ ds=R_ne^{i\varphi}id\varphi,$$

$$|e^{st}|=e^{R_nt\cos\varphi},\ |ds|=R_nd\varphi,$$

поэтому

$$\left|\int\limits_{\overset{\smile}{BCB_1}} e^{st}\,\overline{f(s)}\,ds\right|\leqslant\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{R_nt\cos\varphi}\varepsilon R_nd\varphi=2R_n\varepsilon\int\limits_{\pi/2}^{\pi} e^{R_nt\cos\varphi}d\varphi.$$

Положим $\varphi=\frac{\pi}{2}+\psi$, $\cos\varphi=-\sin\psi$, тогда получим оценку

$$\left|\int\limits_{\overset{\frown}{BCB_1}} e^{st}\overline{f(s)}\,ds\right|<2R_n\varepsilon\int\limits_0^{\pi/2} e^{-R_n t\sin\psi}\,d\psi. \qquad (4;\ 3;\ 2)$$

Но при $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$, $\quad 1\geqslant\frac{\sin\psi}{\psi}\geqslant\frac{2}{\pi}$, или $\sin\psi>\frac{2}{\pi}\psi$.

Умножив это последнее неравенство на отрицательный множитель $-R_n t\,(t>0)$, придем к неравенству $-R_n t\sin\psi<-\frac{2}{\pi}R_n t\psi$ и, следовательно, к неравенству

$$e^{-R_n t\sin\psi}<e^{-\frac{2}{\pi}R_n t\psi}.$$

Используя это неравенство, усилим оценку (4; 3; 2):

$$\left|\int\limits_{\overset{\frown}{BCB_1}} e^{st}\overline{f(s)}\,ds\right|<2R_n\varepsilon\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}R_n t\psi}\,d\psi=\frac{\pi\varepsilon}{t}\left(1-e^{-R_n t}\right). \qquad (4;\ 3;\ 3)$$

Оценка (4; 3; 3) показывает, что при $n\to\infty$ интеграл по дуге BCB_1 также стремится к нулю (поскольку при этом $\varepsilon\to0$, $R_n\to\infty$). Что касается интеграла по отрезку прямой $\operatorname{Re}(s)=\sigma$, лежащему внутри окружности $|s|=R_n$, то этот интеграл имеет вид

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-iR_n\cos\alpha}^{\sigma+iR_n\cos\alpha} e^{st}\overline{f(s)}\,ds$$

и при $n \to \infty$ в пределе обращается в интеграл Римана — Меллина (так как $R_n \to \infty$). Это позволяет нам установить следующее предельное равенство:

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{n\to\infty}\oint_{\Gamma_n} e^{st}\overline{f(s)}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\lim_{n\to\infty}\left\{\int_{\overset{\frown}{AB}} e^{st}\overline{f(s)}\,ds + \right.$$

$$\left. + \int_{\overset{\frown}{BCB_1}} e^{st}\overline{f(s)}\,ds + \int_{\overset{\frown}{B_1A_1}} e^{st}\overline{f(s)}\,ds + \int_{\sigma - iR_n\cos\alpha}^{\sigma + iR_n\cos\alpha} e^{st}\overline{f(s)}\,ds\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{st}\overline{f(s)}\,ds = f(t). \qquad (4;\ 3;\ 4)$$

С другой стороны, по теореме вычетов имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_n} e^{st}\overline{f(s)}\,ds = \sum \operatorname{Res}\left[e^{st}\overline{f(s)}\right], \qquad (4;\ 3;\ 5)$$

где сумма в правой части равенства (4; 3; 5) распространяется на все особые точки функции $\overline{f(s)}$, лежащие внутри контура Γ_n. Когда же $n \to \infty$ $R_n \to \infty$, и поэтому суммирование в правой части равенства (4; 3; 5) будет в пределе распространяться на все особые точки функции $\overline{f(s)}$, поскольку справа от прямой $\operatorname{Re}(s) = \sigma$ функция $\overline{f(s)}$ особых точек не имеет. Сопоставление правых частей формул (4; 3; 4) и (4; 3; 5) и приводит нас к третьей теореме разложения

$$\overline{f(s)} \doteqdot f(t) = \sum \operatorname{Res}\left\{e^{st}\overline{f(s)}\right\}, \qquad (4;\ 3;\ 1)$$

где в правой части суммирование распространяется на все особые точки функции $\overline{f(s)}$.

Третья теорема разложения применима, если выполнены все условия, наложенные на функцию $\overline{f(s)}$ в начале этого параграфа.

Пример. Найти оригинал изображения $\overline{f(s)} = \frac{1}{(s^2+1)^2}$.

Применим для отыскания оригинала третью теорему разложения (применение ее, как легко видеть, законно: $\lim\limits_{s\to\infty} \overline{f(s)} = 0$, при этом стремление $\overline{f(s)}$ к нулю равномерно на всей плоскости). Заданное изображение имеет два полюса второго порядка в точках $s = \pm i$. Найдем $\operatorname*{Res}\limits_{s=\pm i} \left[e^{st}\,\overline{f(s)}\right]$.

Вычет однозначной регулярной функции $F(s)$ в полюсе $s = a$ кратности m определяется по формуле

$$\operatorname*{Res}_{s=a} \{F(s)\} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{s\to a} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \left[(s-a)^m F(s)\right],$$

поэтому в данном случае находим

$$\operatorname*{Res}_{s=i} \left\{e^{st}\,\overline{f(s)}\right\} = \frac{1}{1!} \lim_{s\to i} \frac{d}{ds} \left[(s-i)^2 \frac{e^{st}}{(s^2+1)^2}\right] =$$

$$= \lim_{s\to i} \frac{d}{ds} \left[\frac{e^{st}}{(s+i)^2}\right] = \lim_{s\to i} \left[\frac{te^{st}}{(s+i)^2} - \frac{2e^{st}}{(s+i)^3}\right] =$$

$$= -\frac{te^{it}}{4} + \frac{e^{it}}{4i}.$$

Вычет в полюсе $s = -i$ находим как комплексное число, сопряженное с вычетом в полюсе $s = i$:

$$\operatorname*{Res}_{s=-i} \left\{e^{st}\,\overline{f(s)}\right\} = -\frac{t}{4} e^{-it} - \frac{e^{-it}}{4i}.$$

Поэтому оригиналом для $\overline{f(s)}$ служит функция

$$f(t) = -\frac{t}{4}(e^{it} + e^{-it}) + \frac{1}{4}\left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{i}\right) =$$

$$= -\frac{t}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t.$$

Итак,

$$\frac{1}{(s^2+1)^2} \doteqdot -\frac{t}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t.$$

Результат легко проверить по формулам гл. 3; имеем по формулам (3; 1; 5), (3; 1; 12):

$$\sin t \doteqdot \frac{1}{s^2+1}\ ;\ \ t\cos t \doteqdot \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\ ,$$

поэтому

$$-\frac{t}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t \doteqdot -\frac{1}{2}\ \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{(s^2+1)^2}\ .$$

§ 4. Применение теоремы свертывания оригиналов для отыскания оригинала по заданному изображению

Пусть заданное изображение может быть записано в виде

$$\overline{f\ (s)} = \overline{f_1(s)} \cdot \overline{f_2(s)},$$

причем для функции $\overline{f_1(s)}$ и $\overline{f_2(s)}$ оригиналы известны:

$$\overline{f_1(s)} \doteqdot f_1(t),\ \ \overline{f_2(s)} \doteqdot f_2(t).$$

В этом случае оригинал $\overline{f(s)}$ может быть найден сразу по теореме свертывания оригиналов (см. гл. 2, § 4, п. 1)

$$\overline{f(s)} \doteqdot f\ (t) = \int\limits_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau. \qquad (4;\ 4;\ 1)$$

В качестве примера снова найдем оригинал для $\frac{1}{(s^2+1)^2}$ (см. предыдущий параграф), пользуясь тем, что эту функцию можно записать в виде

$$\overline{f(s)}=\frac{1}{s^2+1}\,\frac{1}{s^2+1}.$$

Поскольку $\frac{1}{s^2+1}\doteqdot\sin t$, имеем по формуле (4; 4; 1)

$$f(t)=\int_0^t \sin\tau\cdot\sin(t-\tau)\,d\tau=\frac{1}{2}\int_0^t[\cos(2\tau-t)-\cos t]\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2\tau-t)}{2}-\tau\cos t\right]\Bigg|_0^t=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin t-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\sin(-t)-t\cos t\right]=-\frac{1}{2}t\cos t+\frac{1}{2}\sin t,$$

тот же результат, что и ранее.

В качестве второго примера применения теоремы свертывания найдем оригинал для функции $\overline{f(s)}=$ $=\frac{s^3}{(s^2+1)^2}$. В этом примере непосредственное применение теоремы свертывания невозможно, поскольку $\frac{s^3}{(s^2+1)^2}=\frac{s^2}{s^2+1}\,\frac{s}{s^2+1}$, и оригинала для первого множителя мы не имеем, но в данном случае можно поступить следующим образом. Запишем $\overline{f(s)}$ в виде

$$\frac{s^3}{(s^2+1)^2}=s\left[\frac{s}{s^2+1}\,\frac{s}{s^2+1}\right].$$

Оригинал для произведения, заключенного в скобках, найдем по теореме свертывания оригиналов, а затем

применим теорему дифференцирования оригинала, поскольку перед скобкой стоит множитель s:

$$\frac{s}{s^2+1}\,\frac{s}{s^2+1} \doteqdot \int_0^t \cos\tau\cos(t-\tau)\,d\tau.$$

Поскольку правая часть обращается в нуль при $t=0$ имеем далее по теореме дифференцирования оригинала (см. гл. 2, § 2, п. 1):

$$s\left[\frac{s^2}{(s^2+1)^2}\right] \doteqdot \frac{d}{dt}\int_0^t \cos\tau\cos(t-\tau)\,d\tau.$$

Но

$$\int_0^t \cos\tau\cos(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t [\cos t+\cos(2\tau-t)]\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\,t\cos t+\frac{1}{2}\sin t,$$

поэтому

$$\frac{s^3}{(s^2+1)^2} \doteqdot \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\,t\cos t+\frac{1}{2}\sin t\right] = \cos t-\frac{1}{2}\,t\sin t.$$

Проверка:

$$\frac{s^3}{(s^2+1)^2} = \frac{s^3+s-s}{(s^2+1)^2} = \frac{s}{s^2+1}-\frac{s}{(s^2+1)^2}.$$

Но $\frac{s}{s^2+1} \doteqdot \cos t$, $\frac{s}{(s^2+1)^2} \doteqdot \frac{1}{2}\,t\sin t$ [см. (3; 1; 11)].

Таким образом, приходим к тому же результату

$$\frac{s^3}{(s^2+1)^2} \doteqdot \cos t-\frac{1}{2}\,t\sin t.$$

Сделанная проверка показывает другой прием отыскания оригинала для данного изображения, который иногда может с успехом применяться в аналогичных случаях.

Упражнения

1. Применяя первую теорему разложения, найти оригиналы для следующих изображений:

а) $\overline{f(s)} = \frac{1}{s} e^{-\frac{1}{s^2}}$.

Ответ: $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!(2n)!}$;

б) $\overline{f(s)} = \frac{1}{s} \sin \frac{1}{s}$.

Ответ: $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{[(2n+1)!]^2}$;

в) $\overline{f(s)} = s \ln \left(1 + \frac{1}{s^2}\right)$.

Ответ: $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(n+1)(2n)!}$.

2. Применяя вторую теорему разложения, найти оригиналы для следующих изображений (результат проверить по третьей теореме разложения):

а) $\overline{f(s)} = \frac{s}{(s^2+1)(s^2+2s+2)}$.

Ответ: $f(t) = \frac{1}{5}(\cos t + 2\sin t) - \frac{1}{5} e^{-t}(\cos t + 3\sin t)$;

б) $\overline{f(s)} = \dfrac{s^2 - 1}{s(s^2+4)^2}$.

Ответ: $f(t) = \dfrac{1}{16}\{\cos 2t + 5t\sin 2t - 1\}$;

в) $\overline{f(s)} = \dfrac{s^2 + s + 1}{(s-1)^3(s^2+1)}$.

Ответ: $f(t) = \dfrac{3t^2 - 1}{4} e^t + \dfrac{1}{4}(\sin t + \cos t)$.

3. Пользуясь теоремой свертывания оригиналов, найти оригинал первого из заданных в каждом примере изображений. Оригиналы остальных найти по оригиналу первого, пользуясь теоремами дифференцирования или интегрирования оригинала:

а) $\overline{f(s)} = \dfrac{s}{s^4-1},\quad \dfrac{1}{s^4-1},\quad \dfrac{1}{s(s^4-1)}$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}(\operatorname{ch} t - \cos t)$, $\dfrac{1}{2}(\operatorname{sh} t - \sin t)$,

$\dfrac{1}{2}(\operatorname{ch} t + \cos t - 2)$;

б) $\overline{f(s)} = \dfrac{1}{(s-1)(s^2+1)},\quad \dfrac{s}{(s-1)(s^2+1)},\quad \dfrac{1}{s(s-1)(s^2+1)}$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}[e^t - \sin t - \cos t]$, $\dfrac{1}{2}[e^t + \sin t - \cos t]$,

$\dfrac{1}{2}[e^t + \cos t - \sin t - 2]$;

в) $\overline{f(s)} = \dfrac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)},\quad \dfrac{s}{(s+1)(s^2+2s+2)}$,

$\dfrac{1}{s(s+1)(s^2+2s+2)}$.

Ответ: $e^{-t}(1-\cos t)$, $e^{-t}(\sin t+\cos t-1)$,

$$\frac{1}{2}e^{-t}(\cos t-\sin t-2)+\frac{1}{2}.$$

ГЛАВА ПЯТАЯ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И СИСТЕМ ТАКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДАМИ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Интегрирование линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Пусть требуется проинтегрировать уравнение

$$x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+\ldots+a_nx(t)=f(t) \quad (5;\ 1;\ 1)$$

при начальных условиях:

$$\text{при } t=0 \quad x=x_0,\ x'=x_0',\ldots,\ x^{(n-1)}=x_0^{(n-1)}; \quad (5;\ 1;\ 2)$$

коэффициенты уравнения $a_k\,(k=1,\ 2,\ldots,n)$ — постоянные, функция $f(t)$, стоящая в правой части уравнения, является оригиналом (изображаема по Лапласу).

Примем, что изображением неизвестного решения уравнения (5; 1; 1), удовлетворяющего начальным условиям (5; 1; 2), является функция $\overline{x(s)}$:

$$x(t)\doteqdot\overline{x(s)}. \quad (5;\ 1;\ 3)$$

По теореме дифференцирования оригинала (см. гл. 2, § 2, п. 1) в силу начальных условий (5; 1; 2) находим

$$x'(t)\doteqdot s\overline{x(s)}-x_0,$$

$$x''(t)\doteqdot s^2\overline{x(s)}-x_0s-x_0', \quad (5;\ 1;\ 4)$$

. . . .

$$x^{(n)}(t) \doteqdot s^n \overline{x(s)} - x_0 s^{n-1} - x_0' s^{n-2} - \ldots - x_0^{(n-1)}.$$

Кроме того, имеем (поскольку $f(t)$ задана)

$$f(t) \doteqdot \overline{f(s)}. \qquad (5;\ 1;\ 5)$$

Так как линейной комбинации функций отвечает в качестве изображения аналогичная линейная комбинация изображений этих функций (см. гл. 2, § 1), а равным функциям соответствуют равные изображения, находим, внося в уравнение (5; 1; 1) вместо всех входящих в него функций их изображения, следующее так называемое «изображающее» уравнение, которому должно удовлетворять изображение $\overline{x(s)}$ искомого решения:

$$(s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n)\overline{x(s)} - \sum_0^{n-1} x_0^{(k)} \psi_{k+1}(s) = \overline{f(s)}, \quad (5;\ 1;\ 6)$$

$$\begin{aligned} \psi_1(s) &= s^{n-1} + a_1 s^{n-2} + \ldots + a_{n-1}, \\ \psi_2(s) &= s^{n-2} + a_1 s^{n-3} + \ldots + a_{n-2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_k(s) &= s^{n-k} + a_1 s^{n-k-1} + \ldots + a_{n-k}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_n(s) &= 1. \end{aligned} \qquad (5;\ 1;\ 7)$$

Изображающее уравнение — алгебраическое уравнение первой степени относительно $\overline{x(s)}$ и поэтому $\overline{x(s)}$ из него немедленно определяется в следующем виде:

$$\overline{x(s)} = \frac{\overline{f(s)} + \sum_{k=0}^{n-1} x_0^{(k)} \psi_{k+1}(s)}{\psi_0(s)}. \qquad (5;\ 1;\ 8)$$

Здесь в соответствии с обозначениями (5; 1; 7) для коэффициента при $\overline{x(s)}$ в уравнении (5; 1; 6) введено обозначение $\psi_0(s)$

$$\psi_0(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n. \qquad (5;\ 1;\ 7^*)$$

Для отыскания самого решения $x(t)$ остается по одному из методов, изложенных в гл. IV, по найденному изображению (5; 1; 8) найти оригинал. Такой метод отыскания решения уравнения (5; 1; 1), удовлетворяющего заданным начальным условиям (5; 1; 2), позволяет сразу найти нужное частное решение данного уравнения; если бы мы интегрировали это же уравнение классическими методами, нам пришлось бы сначала найти общее решение уравнения и затем определить все входящие в общее решение n произвольные постоянные по заданным начальным условиям, что потребовало бы большой дополнительной работы. В то же время отыскание решения уравнения (5; 1; 1) по его изображению (5; 1; 8) не лишает нас возможности, если в этом встретится потребность, найти и общее решение уравнения (5; 1; 1): в самом деле, достаточно в изображении (5; 1; 8) положить $x_0^{(k)} = C_{k+1}$, т. е. считать начальные значения $x(t)$ и его производных *произвольными*, чтобы найти решение уравнения (5; 1; 1), содержащее n произвольных постоянных, т. е. общее решение этого уравнения.

Мы увидим (см. гл. V, § 4), что операционные методы интегрирования линейных дифференциальных уравнений обладают и другими преимуществами перед классическими.

Примеры. 1. Проинтегрировать уравнение

$$x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = te^t$$

при начальных условиях $x_0 = 1$, $x_0' = -2$ при $t = 0$.

Находим изображение правой части (формула (3; 1; 4), гл. 3):

$$te^t \risingdotseq \frac{1}{(s-1)^2}.$$

Полагая $x(t) \risingdotseq \overline{x(s)}$, в силу заданных начальных условий находим

$$x'(t) = s\,\overline{x(s)} - 1,$$

$$x''(t) = s^2\,\overline{x(s)} - s + 2.$$

Заменяя в предложенном уравнении все функции их изображениями, находим изображающее уравнение

$$(s^2 - 3s + 2)\,\overline{x(s)} - s + 5 = \frac{1}{(s-1)^2}.$$

Определяем $\overline{x(s)}$:

$$\overline{x(s)} = \frac{s-5}{s^2-3s+2} + \frac{1}{(s-1)^2\,(s^2-3s+2)} = \frac{s^3-7s^2+11s-4}{(s-1)^3\,(s-2)}.$$

Оригинал для $\overline{x(s)}$ ищем по второй теореме разложения:

$$\overline{x(s)} = \frac{A_{1,1}}{(s-1)^3} + \frac{A_{2,1}}{(s-1)^2} + \frac{A_{3,1}}{s-1} + \frac{A_{1,2}}{s-2},$$

$$A_{1,1} = \frac{1}{0!}\lim_{s\to 1}\left\{(s-1)^3\,\overline{x(s)}\right\} = \lim_{s\to 1}\left\{\frac{s^3-7s^2+11s-4}{s-2}\right\} = -1,$$

$$A_{2,1} = \frac{1}{1!}\lim_{s\to 1}\frac{d}{ds}\left\{(s-1)^3\,\overline{x(s)}\right\} =$$

$$= \lim_{s\to 1}\left\{\frac{3s^2-14s+11}{s-2} - \frac{s^3-7s^2+11s-4}{(s-2)^2}\right\} = -1.$$

$$A_{3,1}=\frac{1}{2!}\lim_{s\to 1}\frac{d^2}{ds^2}\left\{(s-1)^3\overline{x(s)}\right\}=\frac{1}{2}\lim_{s\to 1}\left\{\frac{6s-14}{s-2}-\right.$$

$$\left.-2\,\frac{3s^2-14s+11}{(s-2)^2}+\frac{2\,(s^3-7s^2+11s-4)}{(s-2)^3}\right\}=3,$$

$$A_{1,2}=\frac{1}{0!}\lim_{s\to 2}\left\{(s-2)\,\overline{x(s)}\right\}=\lim_{s\to 2}\left\{\frac{s^3-7s^2+11s-4}{(s-1)^3}\right\}=-2.$$

Таким образом, имеем

$$\overline{x(s)}=-\frac{1}{(s-1)^3}-\frac{1}{(s-1)^2}+\frac{3}{s-1}-\frac{2}{s-2}\,.$$

Находя оригинал каждого слагаемого правой части, получаем решение предложенного уравнения:

$$x(t)=-\frac{t^2}{2}e^t-te^t+3e^t-2e^{2t}.$$

2. Проинтегрировать уравнение $x''+4x=2\sin 2t$ при начальных условиях $x_0=-1$, $x_0'=0$ при $t=0$.

Имеем по таблице изображений

$$2\sin 2t \doteqdot \frac{4}{s^2+4}\,.$$

Полагая $x(t)\doteqdot\overline{x(s)}$, находим в силу начальных условий

$$x''(t)\doteqdot s^2\,\overline{x(s)}+s.$$

Внося в предложенное уравнение вместо функций их изображения, приходим к изображающему уравнению

$$(s^2+4)\,\overline{x(s)}+s=\frac{4}{s^2+4}\,.$$

Отсюда определяем $\overline{x(s)}$:

$$\overline{x(s)}=-\frac{s}{s^2+4}+\frac{4}{(s^2+4)^2}\,.$$

Для отыскания решения не будем правую часть последнего равенства приводить к общему знаменателю, поскольку для первого слагаемого оригинал известен $\left(\frac{s}{s^2+4} \risingdotseq \cos 2t\right)$, а оригинал второго слагаемого легче всего найти по теореме свертывания. Имеем

$$\frac{2}{s^2+4} \risingdotseq \sin 2t,$$

поэтому

$$\frac{4}{(s^2+4)^2} = \frac{2}{s^2+4} \cdot \frac{2}{s^2+4} \risingdotseq \int_0^t \sin 2\tau \sin 2(t-\tau)\, d\tau.$$

Находим последний интеграл

$$\int_0^t \sin 2\tau \sin 2(t-\tau)\, d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t \{\cos(4\tau - 2t) - \cos 2t\}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{\frac{\sin(4\tau - 2t)}{4} - \tau \cos 2t\right\}\Bigg|_0^t = \frac{\sin 2t}{4} - \frac{t}{2} \cos 2t.$$

Окончательно,

$$\overline{x(s)} \risingdotseq x(t) = -\cos 2t + \frac{1}{4} \sin 2t - \frac{t}{2} \cos 2t.$$

Итак, решение предложенного уравнения следующее:

$$x(t) = \frac{1}{4} \sin 2t - \frac{t+2}{2} \cos 2t.$$

3. Найти общее решение уравнения $x'' + 2x' + 5x = te^t$.

Имеем по таблице изображений

$$te^t \risingdotseq \frac{1}{(s-1)^2}.$$

Полагая $x(t) \doteqdot \overline{x(s)}$, находим в силу произвольности начальных условий

$$x'(t) \doteqdot s\,\overline{x(s)} - x_0,$$

$$x''(t) \doteqdot s^2\,\overline{x(s)} - x_0 s - x_0'$$

(здесь x_0 и x_0' играют роль произвольных постоянных). Внося в предложенное уравнение вместо функций их изображения, находим изображающее уравнение

$$(s^2 + 2s + 5)\,\overline{x}(s) - x_0(s+2) - x_0' = \frac{1}{(s-1)^2}.$$

Определяем $\overline{x(s)}$

$$\overline{x}(s) = x_0\,\frac{s+2}{s^2+2s+5} + x_0'\,\frac{1}{s^2+2s+5} + \frac{1}{(s-1)^2(s^2+2s+5)}.$$

Пользуясь формулами (3; 1; 9) и (3; 1; 10), гл. 3, находим оригиналы для первых двух слагаемых в выражении $\overline{x(s)}$:

$$x_0\,\frac{s+2}{s^2+2s+5} = x_0\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\right\} \doteqdot$$

$$\doteqdot x_0 e^{-t}\left\{\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\right\},$$

$$x_0'\cdot\frac{1}{s^2+2s+5} = \frac{x_0'}{2}\cdot\frac{2}{(s+1)^2+2^2} \doteqdot \frac{x_0'}{2}\,e^{-t}\sin 2t.$$

Для отыскания оригинала последнего слагаемого разложим его на простейшие дроби по обычным правилам, применяемым в интегральном исчислении при интегриро-

вании рациональных дробей *,

$$\frac{1}{(s-1)^2(s^2+2s+5)}=\frac{A}{(s+1)^2}+\frac{B}{s+1}+\frac{Cs+D}{s^2+2s+5}.$$

Умножая на знаменатель левой части, приходим к следующему тождеству для определения коэффициентов A, B, C и D:

$$1\equiv A(s^2+2s+5)+B(s-1)(s^2+2s+5)+$$
$$+(Cs+D)(s-1)^2.$$

Положим в этом тождестве $s=1$, тогда $1\equiv 8A$, откуда $A=\frac{1}{8}$.

Затем положим $s=-1+2i$, тогда

$$1\equiv[C(-1+2i)+D](-2+2i)^2\equiv$$
$$\equiv[(D-C)+2Ci](-8i)\equiv 16C-8(D-C)i,$$

откуда

$$C=\frac{1}{16},\ D-C=0,\ \text{или}\ \ D=C=\frac{1}{16}.$$

Коэффициент B определяется из условия равенства нулю коэффициента при s^3 в правой части полученного тождества

$$B+C=0,$$

откуда

$$B=-C=-\frac{1}{16}.$$

---

* В данном случае это проще, чем применять вторую теорему разложения.

Итак,

$$\frac{1}{(s-1)^2(s^2+2s+5)}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(s-1)^2}-\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{s-1}+$$

$$+\frac{1}{16}\cdot\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\doteqdot\frac{1}{8}te^t-\frac{1}{16}e^t+\frac{1}{16}e^{-t}\cos 2t.$$

Собирая оригиналы всех слагаемых, находим решение уравнения

$$x(t)=\frac{2t-1}{16}e^t+e^{-t}\left\{\left(x_0+\frac{1}{16}\right)\cos 2t+\frac{x_0+x_0'}{2}\sin 2t\right\},$$

или

$$x(t)=\frac{2t-1}{16}e^t+e^{-t}\{C_1\cos 2t+C_2\sin 2t\}$$

(в последнем выражении для $x(t)$ мы приняли $x_0+\frac{1}{16}=C_1$, $\frac{x_0+x_0'}{2}=C_2$).

§ 2. Интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами можно интегрировать операционными методами совершенно так же, как и отдельные уравнения; все отличие заключается лишь в том, что вместо одного изображающего уравнения приходим к системе таких уравнений, причем система эта в отношении изображений искомых функций будет *линейной алгебраической*. При этом никаких предварительных преобразований исходной системы дифференциальных уравнений (например, преобразований к нормальной форме) произ-

водить не требуется: всякую систему можно интегрировать в ее первоначальном виде.

Метод интегрирования таких систем покажем на нескольких примерах.

Примеры. 1. Проинтегрировать систему линейных дифференциальных уравнений

$$x'+3x-4y=9e^{2t}$$
$$2x+y'-3y=3e^{2t},$$

при начальных условиях

$$x_0=2,\ y_0=0 \text{ при } t=0.$$

Имеем

$$e^{2t} \doteqdot \frac{1}{s-2}.$$

Положим

$$x(t) \doteqdot \overline{x(s)},\ y(t) \doteqdot \overline{y(s)}.$$

В силу начальных условий найдем

$$x'(t) \doteqdot s\overline{x(s)}-2,\quad y'(t) \doteqdot s\overline{y(s)}.$$

Строим изображающие уравнения

$$(s+3)\overline{x(s)}-4\overline{y(s)}-2=\frac{9}{s-2},$$

$$2\overline{x(s)}+(s-3)\overline{y(s)}=\frac{3}{s-2},$$

или

$$(s+3)\overline{x(s)}-4\overline{y(s)}=\frac{2s+5}{s-2},$$

$$2\overline{x(s)}+(s-3)\overline{y(s)}=\frac{3}{s-2}.$$

Решая эту систему относительно $\overline{x(s)}$ и $\overline{y(s)}$, находим

$$\overline{x(s)}=\frac{2s^2-s-3}{(s^2-1)(s-2)}=\frac{2s-3}{(s-1)(s-2)},$$

$$\overline{y(s)}=-\frac{s+1}{(s^2-1)(s-2)}=-\frac{1}{(s-1)(s-2)},$$

(в обоих случаях произведено сокращение на общий множитель числителя и знаменателя, а именно, на $(s+1)$). Разлагая найденные изображения на простейшие дроби (элементарными способами или используя вторую теорему разложения, что одно и то же), находим

$$\overline{x(s)}=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s-2},\quad \overline{y(s)}=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s-2}.$$

Это позволяет сразу записать решение предложенной системы в виде

$$x(t)=e^t+e^{2t};\quad y(t)=e^t-e^{2t}.$$

2. Найти общее решение однородной системы

$$x''+2x+y'=0,$$
$$3x'-y''+2y=0.$$

Поскольку требуется найти общее решение предложенной системы, начальные условия задаем в виде

$$x=x_0,\ x'=x_0',\ y=y_0,\ y'=y_0' \text{ при } t=0.$$

Полагая, как в предыдущем примере,

$$x(t)\doteqdot\overline{x(s)},\ y(t)\doteqdot\overline{y(s)},$$

находим в силу принятых начальных условий

$$x'(t) \doteqdot s\overline{x(s)} - x_0, \quad y'(t) = s\overline{y(s)} - y_0;$$

$$x''(t) \doteqdot s^2\overline{x(s)} - x_0 s - x_0', \quad y''(t) = s^2\overline{y(s)} - y_0 s - y_0'.$$

Внося в уравнения системы изображения вместо функций, приходим к следующей системе изображающих уравнений:

$$(s^2+2)\overline{x(s)} + s\overline{y(s)} = x_0 s + x_0' + y_0',$$

$$3s\overline{x(s)} - (s^2-2)\overline{y(s)} = -y_0 s + 3x_0 - y_0'.$$

Решая ее, находим следующие выражения для $\overline{x(s)}$ и $\overline{y(s)}$:

$$\overline{x(s)} = \frac{(s^3+s)x_0 + (s^2-2)x_0' - 2y_0 - sy_0'}{(s^2-1)(s^2+4)},$$

$$\overline{y(s)} = \frac{-6x_0 + 3sx_0' + (s^3+5s)y_0 + (s^2+2)y_0'}{(s^2-1)(s^2+4)}.$$

Для отыскания оригиналов здесь проще всего воспользоваться следующим приемом. Имеем

$$\frac{1}{(s^2-1)(s^2+4)} = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{s^2-1} - \frac{1}{s^2+4}\right] \doteqdot \frac{1}{5}\left[\operatorname{sh} t - \frac{1}{2}\sin 2t\right].$$

Отсюда по теореме дифференцирования оригинала последовательно находим (добавочные слагаемые вида $-f(0)$ в левых частях не появляются в силу того, что каждый раз $f(0)=0$)

$$\frac{s}{(s^2-1)(s^2+4)} \doteqdot \frac{1}{5}[\operatorname{ch} t - \cos 2t],$$

$$\frac{s^2}{(s^2-1)(s^2+4)} \doteqdot \frac{1}{5}[\operatorname{sh} t + 2 \sin 2t],$$

$$\frac{s^3}{(s^2-1)(s^2+4)} \doteqdot \frac{1}{5}[\operatorname{ch} t + 4 \sin 2t].$$

Используя эти формулы, находим по вышеприведенным выражениям для $\overline{x(s)}$ и $\overline{y(s)}$ решение предложенной системы

$$x(t) = \frac{2x_0 - y_0'}{5} \operatorname{ch} t - \frac{x_0' + 2y_0}{5} \operatorname{sh} t +$$

$$+ \frac{3x_0 + y_0'}{5} \cos 2t + \frac{3x_0' + y_0}{5} \sin 2t,$$

$$y(t) = \frac{3(x_0' + 2y_0)}{5} \operatorname{ch} t - \frac{3}{5}(2x_0 - y_0') \operatorname{sh} t -$$

$$- \frac{1}{5}(3x_0' + y_0) \cos 2t + \frac{1}{5}(3x_0 + y_0') \sin 2t.$$

Подчеркнем еще раз преимущества операционных методов интегрирования перед классическими:

а) возможность найти частное решение системы (удовлетворяющее заданным начальным условиям), минуя общее (см. пример 1);

б) более удобная форма представления общего решения системы, позволяющая сразу, прямой подстановкой любых заданных начальных условий, выделить нужное частное решение (см. пример 2).

В самом деле, если бы мы решали систему из примера 2 классическими методами, то нашли бы ее общее

решение в виде

$$x(t)=C_1\operatorname{ch}t+C_2\operatorname{sh}t+C_3\cos 2t+C_4\sin 2t,$$

$$y(t)=-3C_2\operatorname{ch}t-3C_1\operatorname{sh}t-C_4\cos 2t+C_3\sin 2t.$$

Для выделения нужного частного решения пришлось бы найденное общее решение дифференцировать, подставлять начальные условия в полученные выражения для x, y, x' и y' и решать систему четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными C_1, C_2, C_3 и C_4; вся эта работа становится излишней при решении системы операционными методами.

§ 3. Передаточная функция и ее оригинал. Интеграл Дюамеля

Пусть требуется проинтегрировать линейное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_nx=f(t) \qquad (5;\ 3;\ 1)$$

при нулевых начальных условиях $x_0=x_0'=\ldots=x_0^{(n-1)}=0$ при $t=0$. Коэффициенты a_k $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ — постоянные, функция $f(t)$ — оригинал.

Поскольку начальные условия — нулевые, изображающее уравнение, в соответствии с обозначениями, принятыми в § 1 этой главы, запишется в виде

$$\psi_0(s)\,\overline{x(s)}=\overline{f(s)}. \qquad (5;\ 3;\ 2)$$

Поэтому в данном случае изображение искомого решения определится по формуле

$$\overline{x(s)}=\frac{1}{\psi_0(s)}\cdot\overline{f(s)}. \qquad (5;\ 3;\ 3)$$

Функция

$$\overline{\pi(s)} = \frac{1}{\psi_0(s)} = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n}, \quad (5;\ 3;\ 4)$$

на которую нужно умножить изображение правой части уравнения (5; 3; 1) для того, чтобы получить изображение решения, отвечающего нулевым начальным условиям, называется *передаточной функцией* уравнения (5; 3; 1). Понятие передаточной функции широко используется в теории автоматического регулирования, причем, по употребляемой в этой теории терминологии, функцию $f(t)$ называют «входным», а само искомое решение $x(t)$ — «выходным» сигналом. Передаточную же функцию определяют как отношение изображений «выходного» и «входного» сигналов. Аналогично вводится понятие передаточных функций для систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и нулевыми начальными условиями как коэффициентов, на которые нужно умножить изображение входных сигналов системы, чтобы получить (после сложения по всем входным сигналам) изображение соответствующей функции на выходе.

Используем понятие передаточной функции для отыскания решения уравнения (5; 3; 1) в общем виде. Начнем со случая уравнения с нулевыми начальными условиями. Изображение его решения (5; 3; 3), используя передаточную функцию, можно записать теперь в виде

$$\overline{x(s)} = \overline{\pi(s)}\,\overline{f(s)}. \quad (5;\ 3;\ 5)$$

Пусть

$$\overline{\pi(s)} \risingdotseq \pi(t), \quad (5;\ 3;\ 6)$$

тогда по теореме свертывания оригиналов решение $x(t)$ может быть сразу найдено в виде

$$x(t)=\int_0^t \pi(\tau) f(t-\tau)\,d\tau. \qquad (5;\ 3;\ 7)$$

Интеграл в правой части (5; 3; 7), определяющий решение линейного уравнения при нулевых начальных условиях в виде свертки оригинала передаточной функции и правой части уравнения, называется *интегралом Дюамеля.*

Интегралу Дюамеля обычно придают иную форму записи. Найдем по формуле (5; 3; 7) решение $x_1(t)$ дифференциального уравнения (5; 3; 1), отвечающее (при нулевых начальных условиях) функции $u(t)$ в его правой части, т. е. решение, отвечающее единичному «входному» сигналу:

$$x_1(t)=\int_0^t \pi(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t \pi(\tau)\,d\tau.$$

Дифференцируя это равенство, находим

$$\pi(t)=x_1'(t).$$

Таким образом, оригинал передаточной функции равен производной от $x_1(t)$ — производной от решения данного уравнения, отвечающего единичному «входному» сигналу при нулевых начальных условиях. В силу этого формуле (5; 3; 7) можно придать вид

$$x(t)=\int_0^t x_1'(\tau)\,f(t-\tau)\,d\tau. \qquad (5;\ 3;\ 7')$$

Преобразуем интеграл в правой части, выполняя интегрирование по частям,

$$x(t)=x_1(\tau)f(t-\tau)\Big|_0^t+\int_0^t x_1(\tau)f'(t-\tau)\,d\tau=$$

$$=x_1(t)f(0)+\int_0^t f'(\tau)x_1(t-\tau)\,d\tau.$$

(Здесь учтено, что $x_1(0)=0$ и что свертка функций не изменяется от их перестановки.)

Таким образом, находим окончательно

$$x(t)=x_1(t)f(0)+\int_0^t f'(\tau)x_1(t-\tau)\,d\tau. \qquad (5;\,3;\,7'')$$

Формулы (5; 3; 7′) и (5; 3; 7″) дают интеграл Дюамеля в общепринятой записи. Они выражают решение дифференциального уравнения (5; 3; 1), отвечающее (при нулевых начальных условиях) произвольному «входному» сигналу $f(t)$ через решение $x_1(t)$ этого же уравнения, отвечающее единичному «входному» сигналу.

Оригинал передаточной функции можно использовать для отыскания решения уравнения (5; 3; 1) и в случае не нулевых начальных условий. Прежде всего, используя равенства (5; 1; 3) и (5; 1; 4), запишем изображающее уравнение для уравнения (5; 1; 1) при начальных условиях (5; 1; 2) в ином виде, чем это было сделано в § 1, а именно, соберем в членах изображающего уравнения, содержащих начальные значения x_0, x_0', ..., x^{n-1}, все слагаемые с одними и теми же степенями s. Изображаю-

щее уравнение примет следующий вид:

$$(s^n + as^{n-1} + \ldots + a_n)\overline{x(s)} -$$
$$-(A_0 + A_1 s + \ldots + A_{n-1}s^{n-1}) = \overline{f(s)}. \qquad (5;\ 3;\ 8)$$

Здесь

$$A_0 = x_0^{(n-1)} + a_1 x_0^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}x_0,$$
$$A_1 = x_0^{(n-2)} + a_1 x_0^{(n-3)} + \ldots + a_{n-2}x_0, \qquad (5;\ 3;\ 9)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_k = x_0^{(n-k-1)} + a_1 x_0^{(n-k-2)} + \ldots + a_{n-k-1}x_0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_{n-1} = x_0$$

Поскольку $\dfrac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n} = \overline{\pi(s)}$, находим следующее выражение для изображения $\overline{x(s)}$ искомого решения:

$$\overline{x(s)} = \overline{\pi(s)} \cdot \overline{f(s)} + \sum_{k=0}^{n-1} A_k s^k \overline{\pi(s)}. \qquad (5;\ 3;\ 10)$$

Оригиналом для первого слагаемого правой части равенства (5; 3; 10) служит интеграл Дюамеля. Оригиналом для $\overline{\pi(s)}$ служит $\pi(t)$. Но так как $\pi(t) = x_1'(t)$ (где $x_1(t)$ — решение исходного уравнения, отвечающее единичному «входному» сигналу и нулевым начальным условиям), то $\pi(0) = \pi'(0) = \pi''(0) = \ldots = \pi^{(n-2)}(0) = 0$. Поэтому по теореме дифференцирования оригинала находим

$$\left.\begin{aligned} \pi'(t) &\doteqdot s\overline{\pi(s)}, \\ \pi''(t) &\doteqdot s^2\overline{\pi(s)}, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \pi^{(n-1)}(t) &\doteqdot s^{n-1}\pi(s). \end{aligned}\right\} \qquad (5;\ 3;\ 11)$$

Используя равенства (5; 3; 11), находим решение уравнения (5; 3; 1) в следующем общем виде:

$$x(t)=\int_0^t \pi(\tau) f(t-\tau)\, d\tau+\sum_{k=0}^{n-1} A_k \pi^{(k)}(t), \quad (5;\ 3;\ 12)$$

где $\pi(t)$ — оригинал передаточной функции, а коэффициенты A_k ($k=0,1, \ldots, n-1$) определяются по начальным условиям и коэффициентам исходного уравнения равенствами (5; 3; 9).

Пример. Проинтегрировать уравнение

$$x''-2x'+2x=te^t.$$

Имеем

$$\overline{\pi(s)}=\frac{1}{s^2-2s+2}, \quad \pi(t)=e^t \sin t \risingdotseq \frac{1}{(s-1)^2+1},$$

$$\pi'(t)=e^t(\sin t+\cos t);$$

$$\int_0^t \pi(\tau) f(t-\tau)\, dt=\int_0^t e^\tau \sin \tau\,(t-\tau)\, e^{t-\tau} d\tau=e^t(t-\sin t);$$

$$A_0=x_0'+a_1 x_0=x_0'-2x_0, \quad A_1=x_0.$$

По формуле (5; 3; 12) находим общее решение предложенного уравнения

$$x(t)=e^t(t-\sin t)+(x_0'-2x_0) e^t \sin t+$$
$$+x_0 e^t(\sin t+\cos t),$$

или

$$x(t)=e^t\{t+(x_0'-x_0-1) \sin t+x_0 \cos t\}.$$

§ 4. Интегрирование уравнений, в правой части которых стоит кусочно-аналитическая функция

Опираясь на теорему запаздывания и найденное в гл. 3, § 5 изображение кусочно-аналитической функции, можно операционными методами без труда проинтегрировать линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, в правой части которого стоит некоторая кусочно-аналитическая функция. Это является еще одним важным преимуществом методов операционного исчисления по сравнению с методами классического анализа: при использовании последних подобные уравнения (правая часть которых имеет различный вид на разных интервалах изменения аргумента) пришлось бы интегрировать по этапам, т. е. на каждом таком интервале по отдельности. При этом на каждом этапе пришлось бы искать свое решение неоднородного уравнения, отвечающее данному виду правой части, определять свои начальные условия и по найденным начальным условиям определять свои значения произвольных постоянных C_1, C_2, ..., C_n, входящих в решение. От всей этой утомительной, а часто и громоздкой работы мы полностью избавляемся, применяя операционные методы.

Примеры. 1. Проинтегрировать уравнение

$$x'' + x = f(t)$$

при нулевых начальных условиях, если функция $f(t)$ задана графиком, изображенным на рис. 25.

Изображение функции $f(t)$ было предложено найти в упражнении 4 рис. 21 к третьей главе. Это изображение (см. ответ к этому упражнению) следующее:

$$\overline{f(s)} = \frac{h}{s^2}\left[\frac{1}{\tau_1}\left(1 - e^{-\tau_1 s}\right) - \frac{1}{\tau_3 - \tau_2}\left(e^{-\tau_2 s} - e^{-\tau_3 s}\right)\right].$$

В силу нулевых начальных условий изображающее уравнение будет иметь вид

$$(s^2+1)\overline{x(s)} = \frac{h}{s^2}\left[\frac{1}{\tau_1}(1-e^{-\tau_1 s}) - \frac{1}{\tau_3-\tau_2}(e^{-\tau_2 s}-e^{-\tau_3 s})\right].$$

Определяем отсюда изображение искомого решения

$$\overline{x(s)} = \frac{h}{s^2(s^2+1)}\left[\frac{1}{\tau_1}(1-e^{-\tau_1 s}) - \frac{1}{\tau_3-\tau_2}(e^{-\tau_2 s}-e^{-\tau_3 s})\right].$$

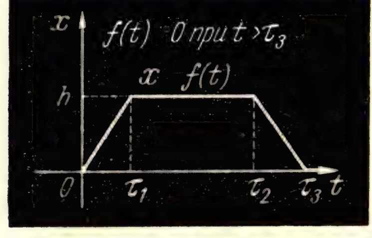


Рис. 25

Находим оригинал для основного слагаемого изображения, т. е. для $\dfrac{h}{s^2(s^2+1)}$:

$$\frac{h}{s^2(s^2+1)} = \frac{h}{s^2} - \frac{h}{s^2+1} \doteqdot h(t-\sin t).$$

Оригиналы остальных слагаемых изображения, отличающихся от первого слагаемого множителями вида $e^{-\tau s}$ (с постоянными коэффициентами), определяются при помощи теоремы запаздывания, а именно:

$$\frac{he^{-\tau s}}{s^2(s^2+1)} \doteqdot hu(t-\tau)[(t-\tau)-\sin(t-\tau)].$$

Таким образом, окончательный вид решения заданного уравнения будет следующий:

$$x(t)=\frac{h}{\tau_1}(t-\sin t)-\frac{h}{\tau_1}u(t-\tau_1)[(t-\tau_1)-\sin(t-\tau_1)]-$$

$$-\frac{h}{\tau_3-\tau_2}u(t-\tau_2)[(t-\tau_2)-\sin(t-\tau_2)]+$$

$$+\frac{h}{\tau_3-\tau_2}u(t-\tau_3)[(t-\tau_3)-\sin(t-\tau_3)].$$

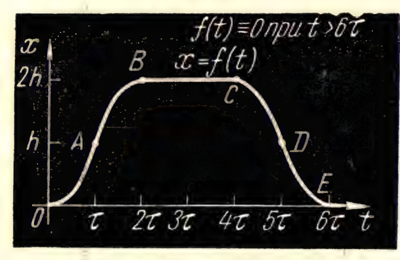


Рис. 26

Найденное выражение для $x(t)$ позволяет определить значение решения данного уравнения для любого значения аргумента t.

2. Проинтегрировать уравнение

$$x''+\beta^2 x=f(t)$$

при нулевых начальных условиях, если функция $f(t)$ задана графиком, изображенным на рис. 26.

График $f(t)$ состоит из дуг четырех парабол второго порядка с вертикальными осями, имеющих вершины соответственно в точках O, B, C и E, и отрезка прямой,

соединяющей вершины B и C второй и третьей парабол. Первая и вторая параболы касаются друг друга в точке $A(\tau, h)$, третья и четвертая — в точке $D(5\tau, h)$. Аналогичный график рассматривался в гл. 3 § 5). Нельзя ли определить значение τ, указанное на этом графике так, чтобы при $t>6\tau$, $x(t)\equiv 0$ (т. е. чтобы движение прекратилось, как только исчезнет возмущение)?

Для нахождения изображения функции $f(t)$ используем формулу (3; 5; 9) гл. 3. Имеем следующие уравнения парабол:

$$x=\frac{h}{\tau^2}t^2 \text{ (первая)},$$

$$x=-\frac{h}{\tau^2}(t-2\tau)^2+2h \text{ (вторая)},$$

$$x=-\frac{h}{\tau^2}(t-4\tau)^2+2h \text{ (третья)},$$

$$x=\frac{h}{\tau^2}(t-6\tau)^2 \text{ (четвертая)}.$$

В точках «стыка» кривых, т. е. в точках $t=0$, τ, 2τ, 4τ, 5τ и 6τ сохраняется непрерывность $f(t)$ и $f'(t)$; разрыв претерпевает в этих точках лишь вторая производная от $f(t)$ со следующими скачками:

$$\Delta f''(0)=\Delta f''(2\tau)=\frac{2h}{\tau^2}, \quad \Delta f''(4\tau)=\Delta f''(6\tau)=-\frac{2h}{\tau^2},$$

$$\Delta f''(\tau)=-\frac{4h}{\tau^2}, \quad \Delta f''(5\tau)=\frac{4h}{\tau^2}.$$

Все производные порядка выше второго от $f(t)$ равны нулю. Отсюда находим изображение $f(t)$ по формуле (3; 5; 12)

$$f(t) \doteqdot \overline{f(s)} = \frac{2h}{\tau^2 s^3}\{1 - 2e^{-\tau s} + e^{-2\tau s} - e^{-4\tau s} + $$
$$+ 2e^{-5\tau s} - e^{-6\tau s}\}.$$

Изображающее уравнение запишется в виде

$$(s^2 + \beta^2)\overline{x(s)} = \overline{f(s)}.$$

Определяем $\overline{x(s)}$:

$$\overline{x(s)} = \frac{2h}{\tau^2 s^3 (s^2 + \beta^2)}[1 - 2e^{-\tau s} + e^{-2\tau s} - e^{-4\tau s} +$$
$$+ 2e^{-5\tau s} - e^{-6\tau s}].$$

Находим оригинал основного слагаемого изображения

$$\frac{2h}{\tau^2} \cdot \frac{1}{s^3(s^2 + \beta^2)} = \frac{2h}{\beta^4 \tau^2}\left[\frac{\beta^2}{s^3} - \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2 + \beta^2}\right] \doteqdot$$
$$\doteqdot \frac{2h}{\beta^4\tau^2}\left[\frac{\beta^2}{2}\ t^2 - 1 + \cos\beta t\right].$$

Отсюда, используя теорему запаздывания, находим решение предложенного уравнения в виде

$$x(t) = \frac{2h}{\beta^4\tau^2}\sum_{k=0}^{k=6} C_k u(t - k\tau)\left[\frac{\beta^2}{2}(t - k\tau)^2 - 1 + \right.$$
$$\left. + \cos\beta(t - k\tau)\right],$$

где коэффициенты C_k имеют следующие значения:

$$C_0 = C_2 = 1;\ C_1 = -2;\ C_3 = 0;\ C_4 = C_6 = -1;\ C_5 = 2.$$

При $t>6\tau$, все функции $u(t-k\tau)=1$; выражение для $x(t)$ после элементарных преобразований приводится к виду

$$x(t)=\frac{8h}{\beta^4\tau^2}(1-\cos\beta\tau)\sin 2\beta\tau\cos\beta(t-3\tau),$$

поэтому, если $\tau=\frac{k\pi}{2\beta}$, где k — любое целое положительное число, $x(t)\equiv 0$ при $t>6\tau$.

§ 5. Интегрирование уравнений, в правой части которых периодическая функция

Наличие простой формулы, определяющей изображение произвольной периодической функции (гл. 3, (3; 4; 3)), позволяет с успехом применять операционные методы при интегрировании линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, в правой части которых стоит периодическая функция. Покажем это на конкретном примере.

Пример. Проинтегрировать уравнение

$$x''+2x'+2x=|\sin t|$$

при нулевых начальных условиях.

В § 4, гл. 3 мы нашли изображение периодической функции $|\sin t|$ (формула (3; 4; 4)):

$$|\sin t| \doteqdot \frac{1+e^{-\pi s}}{1-e^{-\pi s}}\cdot\frac{1}{1+s^2}.$$

Поэтому (с учетом нулевых начальных условий) изображающее уравнение для предложенного уравнения будет иметь вид

$$(s^2+2s+2)\overline{x(s)}=\frac{1+e^{-\pi s}}{1-e^{-\pi s}}\cdot\frac{1}{1+s^2}.$$

Отсюда находим изображение искомого решения

$$\overline{x(s)}=\frac{1}{(s^2+1)\,[(s+1)^2+1]}\cdot\frac{1+e^{-\pi s}}{1-e^{-\pi s}}.$$

Для отыскания самого решения применим третью теорему разложения (условия ее применимости выполнены, поскольку $\lim\limits_{s\to\infty}\overline{x(s)}=0$, причем $\overline{x(s)}$ стремится к нулю равномерно на всей плоскости, если s остается на последовательности окружностей, не содержащей полюсов $\overline{x(s)}$).

Полюсы $\overline{x(s)}$

$$s=\pm i,\ s=-1\pm i,\ s=2ni$$

(n — любое целое положительное или отрицательное число или ноль). Все полюсы $\overline{x(s)}$ простые.

Определим вычеты функции $e^{st}\overline{x(s)}$ в этих полюсах.

1. $$\operatorname*{Res}_{s=i}\{e^{st}\,\overline{x(s)}\}=\lim_{s\to i}\left[\frac{s-i}{s^2+1}\cdot\frac{e^{st}}{(s+1)^2+1}\times\frac{1+e^{-\pi s}}{1-e^{-\pi s}}\right]=0.$$

Аналогично, $\operatorname*{Res}\limits_{s=-i}\{e^{st}\,\overline{x(s)}\}=0$.

2. $$\operatorname*{Res}_{s=-1+i}\{e^{st}\,\overline{x(s)}\}=\lim_{s\to-1+i}\left[\frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{s+1-i}{(s+1)^2+1}e^{st}\times\frac{1+e^{-\pi s}}{1-e^{-\pi s}}\right]=-\operatorname{th}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2-i}{10}e^{-t}e^{it}.$$

Как число, сопряженное с найденным, определяем вычет в точке $s = -1 - i$ *:

$$\operatorname*{Res}_{s=-1-i}\{e^{st}\overline{x(s)}\} = -\operatorname{th}\frac{\pi}{2}\frac{2+i}{10}e^{-t}e^{-it}.$$

Складывая эти вычеты, находим

$$\operatorname*{Res}_{s=-1+i}\{e^{st}\overline{x(s)}\} + \operatorname*{Res}_{s=-1-i}\{e^{st}\overline{x(s)}\} = -\frac{1}{5}\operatorname{th}\frac{\pi}{2}e^{-t}\times$$
$$\times\{2\cos t + \sin t\}.$$

3. $$\operatorname*{Res}_{s=0}\{e^{st}\overline{x(s)}\} = \lim_{s\to 0}\left\{\frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{e^{st}}{(s+1)^2+1}\times\right.$$
$$\left.\times(1+e^{-\pi s})\cdot\frac{s}{1-e^{-\pi s}}\right\} = \lim_{s\to 0}\left\{\frac{s}{1-e^{-\pi s}}\right\} = \frac{1}{\pi}.$$

4. Найдем вычет в точке $s = 2ni$, $n > 0$:

$$\operatorname*{Res}_{s=2ni}\{e^{st}\overline{x(s)}\} = \lim_{s\to 2ni}\left\{\frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{e^{st}}{(s+1)^2+1}\cdot(1+e^{-\pi s})\times\right.$$
$$\left.\times\frac{s-2ni}{1-e^{-\pi s}}\right\} = \frac{(2n^2-1)+2ni}{(4n^2-1)(4n^2+1)}\cdot\frac{1}{\pi}e^{2nit}.$$

При отыскании предела последнего множителя в скобках можно применить правило Лопиталя, которое, как легко видеть, сохраняет силу для регулярных функций

---

* Если функция комплексного переменного для комплексно-сопряженных значений своего аргумента принимает комплексно-сопряженные значения, то и ее вычеты в двух комплексно-сопряженных особых точках будут сопряженными комплексными числами.

комплексного переменного, отношение которых обращается в $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{s \to 2ni} \frac{s - 2ni}{1 - e^{-\pi s}} = \lim_{s \to 2ni} \frac{1}{\pi e^{-\pi s}} = \frac{1}{\pi}.$$

Как число, сопряженное с найденным, находим вычет в точке $s = -2ni$:

$$\operatorname*{Res}_{s=-2ni} \{e^{st}\overline{x(s)}\} = \frac{(2n^2 - 1) - 2ni}{(4n^2 - 1)(4n^4 + 1)} \cdot \frac{1}{\pi} e^{-2nit}.$$

Складывая эти вычеты, находим

$$\operatorname*{Res}_{s=2ni} \{e^{st}\overline{x(s)}\} + \operatorname*{Res}_{s=-2ni} \{e^{st}\overline{x(s)}\} = \frac{1}{(4n^2 - 1)(4n^2 + 1)} \times$$

$$\times \frac{2}{\pi} \{(2n^2 - 1)\cos 2nt - 2n \sin 2nt\}.$$

Суммируя вычеты по всем полюсам функции $\overline{x(s)}$, находим решение предложенного уравнения в следующем виде:

$$x(t) = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{5} \operatorname{th} \frac{\pi}{2} e^{-t} \{2\cos t + \sin t\} +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n^2 - 1)\cos 2nt - 2n \sin 2nt}{(4n^4 - 1)(4n^4 + 1)}.$$

§ 6. Физические задачи

В заключение настоящей главы рассмотрим несколько примеров применения операционных методов к решению физических задач, приводящих к линейным диффе-

ренциальным уравнениям с постоянными коэффициентами.

1. Груз p находится на горизонтальной плоскости и прикреплен к пружине жесткости k, массой которой пренебрегаем. Конец пружины закреплен на плоскости; коэффициент трения при движении равен μ, коэффициент трения покоя — μ_0. В начальный момент пружина сжата на a единиц длины. Найти закон движения груза; определить моменты наибольших последовательных удлинений и сжатий пружины и величину их. Когда движение прекратится и сколько колебаний сделает груз?

Решение. Чтобы груз пришел в движение, нужно чтобы в начальный момент восстанавливающая сила пружины была больше силы трения покоя:

$$ka > \mu_0 p = \mu_0 mg, \text{ откуда } a > \frac{\mu_0 mg}{k}.$$

Введем обозначение $\frac{k}{m} = \omega^2$. Движение может начаться, если $a > \frac{\mu_0 g}{\omega^2}$. Движение будет происходить вдоль прямой, по которой направлена пружина. Эту прямую примем за ось Ox, поместив начало координат в конец нерастянутой пружины. Силы, действующие на груз: а) восстанавливающая сила пружины $F_1 = -kx$; б) сила трения $F_2 = \pm\mu p = \pm\mu mg$. Сила трения направлена в сторону, противоположную направлению движения; знак перед ней противоположен знаку x', поэтому ее можно записать в виде $F_2 = -\mu mg \operatorname{sgn} x'$. Функция $\operatorname{sgn} x$ определяется следующим образом:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 \text{ при } x > 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \\ -1 \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

Уравнение движения груза будет иметь вид

$$mx'' = -kx - \mu mg \operatorname{sgn} x',$$

или, после деления на m, переноса kx влево и использования обозначения $\frac{k}{m} = \omega^2$,

$$x'' + \omega^2 x = -\mu g \operatorname{sgn} x'. \qquad (5;\ 6;\ 1)$$

Пусть последовательные моменты наибольших удлинений и сжатий пружины будут $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$. В начальный момент $\tau_0 = 0$ пружина сжата $x_0 = -a$. В момент τ_n движение груза прекращается в силу того, что восстанавливающая сила пружины в этот момент окажется меньше силы трения покоя.

Так как первоначально пружина была сжата, то в промежутке $0 < t < \tau_1$, скорость $x' > 0$, в промежутке $\tau_1 < t < \tau_2$ $x' < 0$ и т. д. В силу этого функцию $\operatorname{sgn} x'$ можно выразить через единичную функцию $u(t)$ следующим образом:

$$\operatorname{sgn} x' = [1 - u(t-\tau_1)] - [u(t-\tau_1) - u(t-\tau_2] + [u(t-\tau_2) - u(t-\tau_3)] - \ldots + (-1)^{n-1}[u(t-\tau_{n-1}) - u(t-\tau_n)] = 1 + 2\sum_{j=1}^{j=n-1}(-1)^j u(t-\tau_j) + (-1)^n u(t-\tau_n).$$

Внося это выражение $\operatorname{sgn} x'$ в уравнение (5; 6; 1), приходим к следующему окончательному виду уравнения движения груза:

$$x'' + \omega^2 x = -\mu g\left\{1 + 2\sum_{j=1}^{j=n-1}(-1)^j u(t-\tau_j)\right\} \qquad (5;\ 6;\ 2)$$

(мы отбросили последнее слагаемое в выражении $\operatorname{sgn} x'$, так как приняли, что в момент $t = \tau_n$ движение прекра-

щается; поэтому при движении $t \leqslant \tau_n$ и $u(t-\tau_n) \equiv 0$).

Находим изображающее уравнение, используя начальные условия (при $t=0$, $x_0=-a$, $x_0'=0$):

$$(s^2+\omega^2)\overline{x(s)}+sa=-\frac{\mu g}{s}\left\{1+2\sum_{j=1}^{j=n-1}(-1)^j e^{-\tau_j s}\right\}.$$

Отсюда

$$\overline{x(s)}=-\frac{as}{s^2+\omega^2}-\frac{\mu g}{s(s^2+\omega^2)}\left\{1+2\sum_{j=1}^{j=n-1}(-1)^j e^{-\tau_j s}\right\}=$$

$$=-\frac{as}{s^2+\omega^2}-\frac{\mu g}{\omega^2}\left[\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+\omega^2}\right]\times$$

$$\times\left\{1+2\sum_{j=1}^{j=n-1}(-1)^j e^{-\tau_j s}\right\}.$$

По изображению находим закон движения груза

$$x(t)=-a\cos\omega t-\frac{\mu g}{\omega^2}(1-\cos\omega t)-$$

$$-\frac{2\mu g}{\omega^2}\sum_{j=1}^{j=n-1}(-1)^j u(t-\tau_j)[1-\cos\omega(t-\tau_j)]. \quad (5;\ 6;\ 3)$$

Для отыскания моментов остановки движения (моменты наибольших удлинений и сжатий пружины) находим $x'(t)$ (при дифференцировании по t единичные функции ведут себя как постоянные множители)

$$x'(t)=\left(a\omega-\frac{\mu g}{\omega}\right)\sin\omega t-\frac{2\mu g}{\omega}\sum_{j=1}^{j=n-1}(-1)^j u(t-\tau_j)\times$$

$$\times\sin\omega(t-\tau_j). \quad (5;\ 6;\ 4)$$

Последовательно находим для промежутков времени $(0, \tau_1)$, $(\tau_1, \tau_2)\ldots$

1) $0 < t < \tau_1$; $u(t-\tau_j)=0$ $(j=1, 2, \ldots, n-1)$.

$$x(t) = -a\cos\omega t - \frac{\mu g}{\omega^2}(1-\cos\omega t),\ x'(t) =$$

$$= \left(a\omega - \frac{\mu g}{\omega}\right)\sin\omega t,\ x'(\tau_1)=0,$$

причем τ_1 — наименьший *положительный* корень уравнения $x'(t)=0$. Отсюда $\tau_1 = \frac{\pi}{\omega}$, $x(\tau_1) = a - \frac{2mg}{\omega^2}$;

2) $\frac{\pi}{\omega} = \tau_1 < t < \tau_2$, $u(t-\tau_1)=1$, $u(t-\tau_j)=0$

$$(j=2, 3, \ldots, n-1).$$

$$x(t) = -a\cos\omega t - \frac{\mu g}{\omega^2}(1-\cos\omega t) +$$

$$+\frac{2\mu g}{\omega^2}\left[1-\cos\omega\left(t-\frac{\pi}{\omega}\right)\right],$$

$$x'(t) = \left(a\omega - \frac{\mu g}{\omega}\right)\sin\omega t + \frac{2\mu g}{\omega}\sin\omega\left(t-\frac{\pi}{\omega}\right),$$

$x'(\tau_2)=0$, причем τ_2 — наименьший корень уравнения $x'(t)=0$, больший $\tau_1 = \frac{\tau}{\omega}$. Отсюда $\tau_2 = \frac{2\pi}{\omega}$, $x(\tau_2) = -a + \frac{4\mu g}{\omega}$ и т. д.

Последовательно найдем: $\tau_3=\frac{3\pi}{\omega}$, $\tau_4=\frac{4\pi}{\omega}$, ..., $\tau_n=\frac{\pi n}{\omega}$,

$$x(\tau_3)=+a-\frac{6\mu g}{\omega^2},\ x(\tau_4)=-a+\frac{8\mu g}{\omega^2},\ \ldots,$$

$$x(\tau_n)=(-1)^{n-1}\left[a-\frac{2n\mu g}{\omega^2}\right].$$

Так как по предположению движение прекращается при $t=\tau_n$, то в этот момент времени восстанавливающая сила пружины, равная $k|x(\tau_n)|=m\omega^2|x(\tau_n)|$, должна быть меньше силы трения покоя, равной $\mu_0 mg$.

Итак, число колебаний n определится из условия

$$m\omega^2|x(\tau_n)|=m\omega^2\left(a-\frac{2n\mu g}{\omega^2}\right)<\mu_0 mg,$$

откуда

$$n>\frac{a\omega^2-\mu_0 g}{2\mu g}. \qquad (5;\ 6;\ 5)$$

При этом n — наименьшее целое положительное число, удовлетворяющее неравенству (5; 6; 5).

2. Математический маятник длины l выводится из положения равновесия тем, что точка его подвеса совершает в горизонтальном направлении n полных гармонических колебаний с малой амплитудой a и частотой ω. Найти закон колебаний маятника. Рассмотреть случаи:

а) $\sqrt{\frac{g}{l}}=k\neq\omega$; б) $\sqrt{\frac{g}{l}}=k=\omega$ (резонанс).

Решение. Если обозначить через $x(t)$ отклонение маятника (по горизонтали) от начального положения равновесия, а через $y(t)$ — соответствующее отклонение

точки подвеса, то уравнение движения маятника будет

$$x'' = -\frac{g}{l}(x-y) = -k^2(x-y).$$

По условию

$$y = a\left[1 - u\left(t - \frac{2\pi n}{\omega}\right)\right]\sin\omega t = a\sin\omega t -$$

$$-au\left(t-\frac{2\pi n}{\omega}\right)\sin\omega\left(t-\frac{2\pi n}{\omega}\right)\left(\text{поскольку } \sin\omega\left(t-\frac{2\pi n}{\omega}\right) = \right.$$

$$\left. = \sin(\omega t - 2\pi n) = \sin\omega t\right),$$

поэтому уравнение движения маятника может быть окончательно записано в виде

$$x'' + k^2x = k^2a\left[\sin\omega t - u\left(t-\frac{2\pi n}{\omega}\right)\sin\omega\left(t-\frac{2\pi n}{\omega}\right)\right]. \quad (5;\ 6;\ 6)$$

Поскольку при $t=0$ $x_0=0$ и $x_0'=0$, изображающее уравнение запишется в виде

$$(s^2+k^2)\overline{x(s)} = \frac{k^2\omega a}{s^2+\omega^2}\left(1-e^{-\frac{2\pi n}{\omega}s}\right).$$

Отсюда находим

$$\overline{x(s)} = \frac{k^2\omega a}{(s^2+k^2)(s^2+\omega^2)}\left(1-e^{-\frac{2\pi n}{\omega}s}\right). \quad (5;\ 6;\ 7)$$

Рассмотрим отдельно случаи $\omega \neq k$ и $\omega = k$:

а) $\omega \neq k$

$$\overline{x(s)} = \frac{ka}{\omega^2-k^2}\left[\frac{k\omega}{s^2+k^2} - \frac{k\omega}{s^2+\omega^2}\right]\left(1-e^{-\frac{2\pi n}{\omega}s}\right).$$

По изображению находим закон колебаний маятника

$$x(t)=\frac{ka}{\omega^2-k^2}\left\{[\omega\sin kt-k\sin\omega t]-u\left(t-\frac{2\pi n}{\omega}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left[\omega\sin k\left(t-\frac{2\pi n}{\omega}\right)-k\sin\omega\left(t-\frac{2\pi n}{\omega}\right)\right]\right\},$$

или после очевидных преобразований для $t<\frac{2\pi n}{\omega}$ и $t>$ $>\frac{2\pi n}{\omega}$:

при $0\leqslant t\leqslant\frac{2\pi n}{\omega}$ $\quad x(t)=\frac{ka}{\omega^2-k^2}(\omega\sin kt-k\sin\omega t)$,

при $t>\frac{2\pi n}{\omega}$ $\quad x(t)=\frac{2k\omega a}{\omega^2-k^2}\sin\frac{k\pi n}{\omega}\cos k\left(t-\frac{\pi n}{\omega}\right)$;

б) $\omega=k$

$$\overline{x(s)}=\frac{k^3a}{(s^2+k^2)^2}\left(1-e^{-\frac{2\pi n}{k}s}\right)=\frac{a}{2}\left[\frac{k}{s^2+k^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{k(s^2-k^2)}{(s^2+k^2)^2}\right]\left(1-e^{-\frac{2\pi n}{k}s}\right).$$

Отсюда по изображению находим закон колебаний маятника

$$x(t)=\frac{a}{2}\left\{\sin kt-kt\cos kt)-u\left(t-\frac{2\pi n}{k}\right)\left[\sin k\left(t-\frac{2\pi n}{k}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-k\left(t-\frac{2\pi n}{k}\right)\cos k\left(t-\frac{2\pi n}{k}\right)\right]\right\},$$

или

$$\text{при } 0 \leqslant t \leqslant \frac{2\pi n}{k} \quad x(t) = \frac{a}{2}(\sin kt - kt\cos kt),$$

$$\text{при } t > \frac{2\pi n}{k} \quad x(t) = -\pi n a \cos kt.$$

3. На вал AB насажены два маховика A и B с одинаковыми моментами инерции I; жесткость вала λ, моментом инерции его можно пренебречь. В начальный момент $t=0$ маховику A сообщается принудительное вращение с постоянной угловой скоростью ω, которое поддерживается в течение времени T, по истечении которого система предоставляется самой себе. Определить закон движения обоих маховых колес.

Решение. Обозначим углы поворота маховиков A и B через φ и ψ. Для промежутка времени $0 \leqslant t \leqslant T$ имеем для маховика A: $\varphi = \omega t$. Дифференциальное уравнение движения маховика B будет

$$I\psi'' + \lambda(\psi - \omega t) = 0. \qquad (\alpha)$$

При $t > T$ дифференциальные уравнения движения маховиков будут

$$I\varphi'' + \lambda(\varphi - \psi) = 0 \text{ и } I\psi'' + \lambda(\psi - \varphi) = 0. \quad (\beta)$$

В данном случае нецелесообразно пытаться объединить обе системы (α) и (β) в одну; проще, решив первую из них, определить по найденному решению начальные условия для второй (в момент времени $t=T$).

Решение первой системы дает для угла ψ (при нулевых начальных условиях) значение

$$\psi = \omega t - \frac{\omega}{k}\sin kt$$

(через k^2 обозначено отношение $\frac{\lambda}{I}$). Отсюда находим начальные условия для системы (β)

$$\varphi_0=\omega T,\ \varphi_0'=\omega;\ \psi_0=\omega T-\frac{\omega}{k}\sin kT;$$

$$\psi_0'=\omega(1-\cos kT).$$

Перенесем начало отсчета времени, полагая $t=t_1+T$, чтобы начальные условия для системы (β) были заданы при $t_1=0$. Перепишем систему (β) в виде

$$\begin{aligned}&\varphi''+k^2\varphi-k^2\psi=0,\\&-k^2\varphi+\psi''+k^2\psi=0.\end{aligned} \qquad (5;\ 6;\ 8)$$

Изображающая система (по аргументу t_1) будет иметь вид

$$(s^2+k^2)\bar{\varphi}-k^2\bar{\psi}=s\omega T+\omega;$$

$$-k^2\bar{\varphi}+(s^2+k^2)\bar{\psi}=s\omega T+\omega-\frac{s\omega}{k}\sin kT-\omega\cos kT.$$

Исключая поочередно $\bar{\psi}$ и $\bar{\varphi}$, находим

$$s^2(s^2+2k^2)\bar{\varphi}=(s^2+2k^2)(s\omega T+\omega)-s\omega k\sin kT-\omega k^2\cos kT,$$

$$s^2(s^2+2k^2)\bar{\psi}=(s^2+2k^2)(s\omega T+\omega)-$$
$$-(s^2+k^2)\left[\frac{s\omega}{k}\sin kT+\omega\cos kT\right].$$

Отсюда определяем $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$:

$$\bar{\varphi}=\frac{\omega T}{s}+\frac{\omega}{s^2}-\frac{\omega\sin kT}{2k}\left[\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+2k^2}\right]-$$
$$-\frac{\omega\cos kT}{2}\left[\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+2k^2}\right],$$

$$\bar{\psi}=\frac{\omega T}{s}+\frac{\omega}{s^2}-\frac{\omega\sin kT}{2k}\left[\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+2k^2}\right]-$$
$$-\frac{\omega\cos kT}{2}\left[\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^2+2k^2}\right].$$

По найденным изображениям определяем ψ и φ:

$$\varphi=\omega T+\omega t_1-\frac{\omega\sin kT}{2k}[1-\cos k\sqrt{2}\,t_1]-$$
$$-\frac{\omega\cos kT}{2}\left[t_1-\frac{1}{k\sqrt{2}}\sin k\sqrt{2}\,t_1\right],$$
$$\psi=\omega T+\omega t_1-\frac{\omega\sin kT}{2k}[1+\cos k\sqrt{2}\,t_1]-$$
$$-\frac{\omega\cos kT}{2}\left[t_1+\frac{1}{k\sqrt{2}}\sin k\sqrt{2}\,t_1\right].$$

Чтобы вернуться к аргументу t, надо в этих формулах положить $t_1=t-T$. Окончательный ответ (для $t>T$) будет иметь вид

$$\varphi=\omega t-\frac{\omega\sin kT}{2k}[1-\cos k\sqrt{2}(t-T)]-$$
$$-\frac{\omega\cos kT}{2}\left[t-T-\frac{1}{k\sqrt{2}}\sin k\sqrt{2}(t-T)\right],$$
$$\psi=\omega t-\frac{\omega\sin kT}{2k}[1+\cos k\sqrt{2}(t-T)]-$$
$$-\frac{\omega\cos kT}{2}\left[t-T+\frac{1}{k\sqrt{2}}\sin k\sqrt{2}(t-T)\right].$$

4. К электрической цепи, в которую последовательно включены самоиндукция L, сопротивление R и емкость

C с начальным током и зарядом, равными нулю, приложена электродвижущая сила, равная E_1 при $0<t<T$ и E_2 при $t>T$, где E_1, E_2 и T — постоянные. Найти ток в цепи.

Решение. Обозначая через $i(t)$ ток и через Q заряд конденсатора, приходим к уравнению

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{Q}{C}=[1-u(t-T)]E_1+u(t-T)E_2.$$

Но $\frac{dQ}{dt}=i$ и поскольку начальный заряд равен нулю, $Q=\int\limits_0^t idt$. Уравнение приводится к виду

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int\limits_0^t idt=E_1+u(t-T)(E_2-E_1).$$

Переходим к изображающему уравнению, полагая $i(t)\doteq\overline{i(s)}$. Так как $i_0=0$ получаем уравнение

$$\left(Ls+R+\frac{1}{Cs}\right)\overline{i(s)}=\frac{E_1}{s}+\frac{E_2-E_1}{s}e^{-Ts}.$$

Находим $\overline{i(s)}$:

$$\overline{i(s)}=\frac{\frac{E_1}{L}+\frac{E_2-E_1}{L}e^{-Ts}}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{CL}}=\frac{\frac{E_1}{L}+\frac{E_2-E_1}{L}e^{-Ts}}{(s+k)^2+n^2}.$$

Здесь приняты обозначения $k=\frac{R}{2L}$, $n^2=\frac{1}{CL}-\frac{R^2}{4L^2}>0$ (ограничимся рассмотрением только этого, наиболее об-

щего случая). По изображению находим ток

$$i(t)=\frac{E_1}{Ln}e^{-kT}\sin nt+\frac{E_2-E_1}{Ln}u(t-T)e^{-k(t-T)}\sin(t-T).$$

5. Две одинаковые электрические цепи, состоящие из самоиндукции L, сопротивления R и емкости C, соединенных последовательно, связаны взаимной индукцией M, причем имеется идеальная связь, при которой $M=L$. Начальные токи и заряды равны нулю. К одной из цепей в момент времени $t=0$ прилагается постоянное напряжение E_0. Найти токи в обеих цепях.

Решение. Вводя обозначения i_1 и i_2 для токов, Q_1 и Q_2 для зарядов конденсаторов, приходим к системе уравнений

$$L\frac{di_1}{dt}+Ri_1+\frac{Q_1}{C}+L\frac{di_2}{dt}=E_0,$$

$$L\frac{di_2}{dt}+Ri_2+\frac{Q_2}{C}+L\frac{di_1}{dt}=0.$$

Поскольку $Q_1=\int_0^t i_1dt,\quad Q_2=\int_0^t i_2dt$ (начальные заряды равны нулю) и, кроме того, $i_1|_{t=0}=i_2|_{t=0}=0$, переходя к изображениям, приходим к системе

$$\left(Ls+R+\frac{1}{Cs}\right)\overline{i_1(s)}+Ls\overline{i_2(s)}=\frac{E_0}{s},$$

$$Ls\overline{i_1(s)}+\left(Ls+R+\frac{1}{Cs}\right)\overline{i_2(s)}=0.$$

Отсюда находим

$$\overline{i_1(s)}=\frac{\frac{E_0}{2R}}{s+\frac{1}{RC}}+\frac{\frac{E_0}{4L}}{s^2+\frac{R}{2L}s+\frac{1}{2LC}},$$

$$\overline{i_2(s)}=-\frac{\frac{E_0}{2R}}{s+\frac{1}{RC}}+\frac{\frac{E_0}{4L}}{s^2+\frac{R}{2L}s+\frac{1}{2LC}}.$$

Предполагая, что $\frac{1}{2LC}-\frac{R^2}{16L^2}=n^2>0$, находим токи в обеих цепях

$$i_1(t)=\frac{E_0}{2R}e^{-\frac{t}{RC}}+\frac{E_0}{4Ln}e^{-\frac{R}{4L}t}\sin nt,$$

$$i_2(t)=-\frac{E_0}{2R}e^{-\frac{t}{RC}}+\frac{E_0}{4Ln}e^{-\frac{R}{4L}t}\sin nt.$$

Примечание. При подборе задач для этого параграфа автором частично использованы упражнения к главам 2 и 3 из книги Х. Карслоу и Д. Егер «Операционные методы в прикладной математике». ИЛ, 1948.

Упражнения

1. Найти решения следующих дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях:

а) $x''+2x'+x=e^{-t}$, $x_0=1$, $x_0'=0$ при $t=0$.

Ответ: $x=e^{-t}\left(1+t+\frac{t^2}{2}\right)$;

б) $x'' - 9x = \operatorname{sh} t, \quad x_0 = -1, \quad x_0' = 3$ при $t = 0$.

Ответ: $x = \frac{25}{24} \operatorname{sh} 3t - \operatorname{ch} 3t - \frac{1}{8} \operatorname{sh} t$;

в) $x''' - x'' = e^t, \quad x_0 = 1, \ x_0' = 0, \ x_0'' = 0$ при $t = 0$.

Ответ: $x = 3 + t + (t - 2) e^t$;

г) $x^{\mathrm{IV}} - x'' = \operatorname{sh} t, \quad x_0 = x_0' = x_0'' = 0, \ x_0''' = 1$ при $t = 0$.

Ответ: $x = \frac{1}{2}(t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t)$.

2. Найти общие решения следующих дифференциальных уравнений:

а) $x'' + 9x = \cos 3t$.

Ответ: $x = x_0 \cos 3t + \frac{1}{3} x_0' \sin 3t + \frac{1}{6} t \sin 3t$;

б) $x'' - 4x' + 5x = e^t$.

Ответ: $x = \left(x_0 - \frac{1}{2}\right) e^{2t} \cos t + \left(x_0' - 2x_0 + \frac{1}{2}\right) e^{2t} \sin t + \frac{1}{2} e^t$;

в) $x'' - 2x' = e^{2t}$

Ответ: $x = x_0 - \frac{x_0'}{2} + \frac{1}{4} + \left(\frac{x_0'}{2} + \frac{t}{2} - \frac{1}{4}\right) e^{2t}$;

г) $x'' - x' - 2x = t$.

Ответ: $x=\frac{1}{3}\left(x_0+x_0'+\frac{1}{4}\right)e^{2t}+\frac{1}{3}\left(2x_0-x_0'-1\right)e^{-t}+$

$$+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}t.$$

3. Найти решения следующих систем линейных дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях:

а) $\left.\begin{aligned} x''+y'&=\operatorname{sh} t-\sin t-t,\\ y''+x'&=\operatorname{ch} t-\cos t.\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}&x=0,\quad x_0'=2,\\ &y_0=1,\quad y_0'=0 \text{ при } t=0.\end{aligned}$

Ответ: $x=\operatorname{sh} t+t;\ y=\cos t-\frac{t^2}{2};$

б) $\left.\begin{aligned} x''-x'+y'&=e^{-t}+\cos t,\\ x'-y''-y'&=2e^t+\sin t.\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}&x_0=2,\ x_0'=1,\\ &y_0=0,\ y_0'=1 \text{ при } t=0.\end{aligned}$

Ответ; $x=2e^t-\sin t;\quad y=-e^{-t}+\cos t;$

в) $\left.\begin{aligned} x''+y'+y&=e^t-t,\\ x'-x+2y''-y&=-e^{-t}.\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}&x_0=1,\ x_0'=2,\\ &y_0=y_0'=0 \text{ при } t=0.\end{aligned}$

Ответ: $x=t+e^t;\quad y=1-t-e^{-t}.$

4. Найти общие решения следующих систем дифференциальных уравнений:

а) $\left.\begin{aligned} x''-y'&=1,\\ y''-x'&=0.\end{aligned}\right\}$

Ответ: $x=\left(x_0-y_0'-1\right)+x_0'\operatorname{sh} t+\left(1+y_0'\right)\operatorname{ch} t;$

$$y=y_0-x_0'-t+\left(1+y_0'\right)\operatorname{sh} t+x_0'\operatorname{ch} t;$$

б) $\left.\begin{aligned} x'' + y'' &= 0, \\ x' + y &= 1 + e^{t}. \end{aligned}\right\}$

Ответ: $x = \left(x_0 + y_0 - 1 + x_0' + y_0'\right) + \left(1 - y_0 - x_0' - y_0'\right) e^{t} +$

$$+ \left(x_0' + y_0'\right)^{t + te^{t}}, \quad y = \left(x_0' + y_0' + y_0 - 1 - t\right) e^{t} - \left(x_0' + y_0' - 1\right).$$

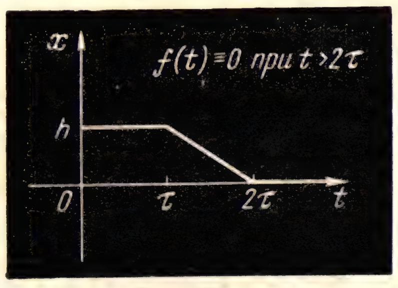


Рис. 27

Примечание. В решение этой системы может войти лишь три независимых произвольных постоянных, так как сумма порядков уравнений системы равна трем; легко видеть, что в силу второго уравнения системы начальные значения x_0' и y_0 связаны условием $x_0' + y_0 = 2$, поэтому в решении остаются лишь три произвольных постоянных x_0, y_0, и y_0'.

Окончательная форма ответа для этой системы будет поэтому следующая:

$$x = \left(x_0 + y_0' + 1\right) - \left(1 + y_0'\right) e^{t} + \left(2 - y_0 + y_0'\right)^{t + te^{t}},$$

$$y = \left(1 + y_0' - t\right) e^{t} + \left(y_0 - y_0' - 1\right).$$

5. Проинтегрировать следующие уравнения, в правой части которых стоят кусочно-аналитические функции, при нулевых начальных условиях:

а) $x'' - x = f(t)$, где $f(t)$ — задана графиком (рис. 27).

$$\textit{Ответ: } x = h\{\operatorname{ch} t - 1\} - \frac{h}{\tau} u(t-\tau)\{\operatorname{sh}(t-\tau) -$$

$$-(t-\tau)\} + \frac{h}{\tau} u(t-2\tau)\{\operatorname{sh}(t-2\tau) -$$

$$-(t-2\tau)\};$$

б) $x'' + x = f(t)$, где $f(t)$ задана графиком (рис. 28).



Рис. 28

$$\textit{Ответ: } x = -\frac{4h}{\tau} u(t-\tau)\{(t-\tau) -$$

$$-\sin(t-\tau)\} + \frac{2h}{\tau^2}\left\{\left(\frac{t^2}{2} - 1 + \cos t\right) -\right.$$

$$-u(t-2\tau)\left[\frac{(t-2\tau)^2}{2} - 1 +\right.$$

$$\left.\left. + \cos(t-2\tau)\right]\right\};$$

в) $x'' + x' = f(t)$, где $f(t)$ задана графиком (рис. 29).



Рис. 29

Ответ:
$$x = \frac{h}{\tau}\left[1 - t + \frac{t^2}{2} - e^{-t}\right] - \frac{3h}{\tau} u(t-\tau)\left[1 - (t-\tau) + \frac{(t-\tau)^2}{2} - e^{-(t-\tau)}\right] + \frac{2h}{\tau^2} u(t-\tau) \times$$
$$\times \left[e^{-(t-\tau)} + \frac{(t-\tau)^3}{6} - \frac{(t-\tau)^2}{2} + (t-\tau) - 1\right] - \frac{2h}{\tau^2} u(t-2\tau)\left[e^{-(t-2\tau)} + \frac{(t-2\tau)^3}{6} - \frac{(t-2\tau)^2}{2} + (t-2\tau) - 1\right].$$

6. Используя оригинал передаточной функции и интеграл Дюамеля, проинтегрировать следующие уравнения:

а) $x'' - 2x' + x = e^t$ при нулевых начальных условиях.

$$\textit{Ответ;}\ x = \int_0^t \tau e^{\tau} \cdot e^{(t-\tau)} d\tau = \frac{t^2}{2} e^t;$$

б) $x'' + x = \operatorname{sh} t$ при произвольных начальных условиях.

$$\textit{Ответ:}\ x = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} t - \sin t) + x_0' \sin t + x_0 \cos t;$$

в) $x'' + 2x' + 2x = e^{-t}$ при начальных условиях $x_0 = 0$, $x_0' = 1$ при $t = 0$.

$$\textit{Ответ:}\ x = (1 - \cos t + \sin t) e^{-t}.$$

7. Проинтегрировать следующие уравнения с периодической функцией в правой части при нулевых начальных условиях:

а) $x'' - x = f(t)$, где $f(t)$ задана графиком (рис. 30).

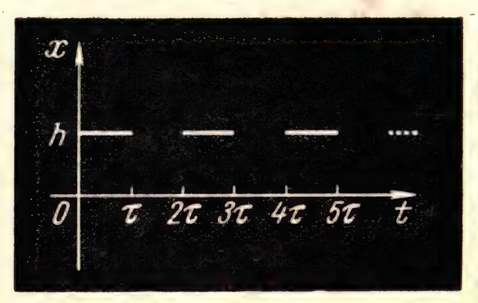


Рис. 30

$$\textit{Ответ:}\ \overline{f(s)} = \frac{h}{s(1+e^{-s\tau})},\ \overline{x(s)} = \frac{h}{s(s^2-1)(1+e^{-s\tau})}$$

$$x = -\frac{h}{2} + \frac{h}{2}\left[\frac{e^t}{1+e^{-\tau}} + \frac{e^{-t}}{1+e^{\tau}} - \right.$$

$$-\frac{2h\tau^2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\frac{\pi t}{\tau}}{(2k+1)[\tau^2+(2k+1)\pi^2]};$$

б) $x''+\frac{\pi^2}{\tau^2}x=f(t)$, где $f(t)$ задана графиком (рис. 31) (так называемая «равноскатная крыша»).

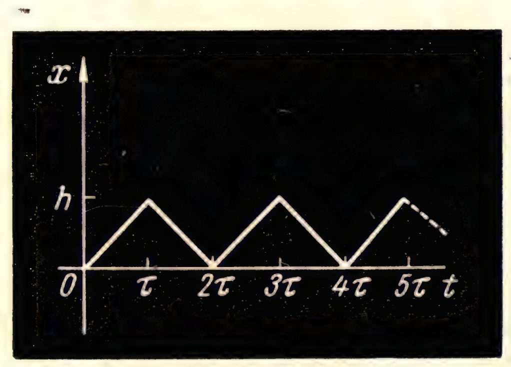


Рис. 31

Ответ: $\overline{f(s)}=\frac{h}{\tau s^2}\,\frac{1-e^{-\tau s}}{1+e^{-\tau s}}$; $\overline{x(s)}=\frac{h}{\tau s^2\left(s^2+\frac{\pi^2}{\tau^2}\right)}\,\frac{1-e^{-\tau s}}{1+e^{-\tau s}}$,

$$x=\frac{h\tau^2}{2\pi^2}-\frac{2h\tau}{\pi^3}\,t\sin\frac{\pi t}{\tau}-\frac{5ht^2}{\pi^4}\cos\frac{\pi t}{\tau}+$$

$$+\frac{h\tau^2}{\pi^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\frac{\pi t}{\tau}}{k(k+1)(2k+1)^2}.$$

Полюсы $s = \pm \frac{\pi i}{\tau}$ — двойные полюсы $\overline{x(s)}$. Вычеты в них определяются по формуле

$$\operatorname*{Res}_{s=\pm\frac{\pi i}{\tau}} \left\{ e^{st} \overline{x(s)} \right\} = \lim_{s=\pm\frac{\pi i}{\tau}} \frac{d}{ds} \left[\left(s \mp \frac{\pi i}{\tau} \right)^2 e^{st} \overline{x(s)} \right].$$

Значение вычета в точке $s = \frac{\pi}{\tau} i$ (приводимое для самопроверки) следующее:

$$\operatorname*{Res}_{s=\frac{\pi i}{\tau}} \{ e^{st} \overline{x(s)} \} = -\frac{h\tau}{\pi^3 i} t e^{\frac{\pi i t}{\tau}} - \frac{5h\tau^2}{2\pi^4} e^{\frac{\pi i t}{\tau}}.$$

8. Проинтегрировать при нулевых начальных условиях уравнение

$$x'' + x = |\sin t|.$$

Ответ: $\overline{x(s)} = \frac{1}{(s^2+1)^2} \cdot \frac{1+e^{-\pi s}}{1-e^{-\pi s}}$,

$$x(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{4} \cos t + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{(4n^2-1)^2}.$$

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ИМПУЛЬСНЫЕ ФУНКЦИИ, ИХ ИЗОБРАЖЕНИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ

§ 1. Импульсная функция первого порядка

Рассмотрим функцию $\delta_\tau(t)$, определенную следующим образом:

$$\delta_\tau(t)=\frac{1}{\tau} \text{ в промежутке } (0, \tau),$$

$$\delta_\tau(t)=0 \text{ при } t<0 \text{ и } t>\tau. \qquad (6;\ 1;\ 1)$$

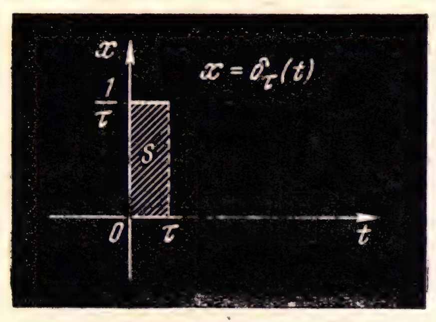


Рис. 32

График этой функции изображен на рис. 32.

Площадь S, ограниченная графиком этой функции, как площадь прямоугольника с основанием τ и высотой

$\frac{1}{\tau}$ равна единице. Иначе этот результат можно записать и так:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\tau(t)\,dt = 1.$$

Механически эту функцию можно истолковать как силу постоянной величины и направления, действующую в течение малого промежутка времени с импульсом (за время действия), равным единице. Эта сила, будучи приложена к материальной точке с единичной массой, сообщит этой точке за время своего действия скорость $v=1$. За время действия силы материальная точка переместится на отрезок длины $\frac{\tau}{2}$, а дальше будет двигаться с постоянной единичной скоростью.

Найдем изображение функции $\delta_\tau(t)$. Для этого запишем ее в виде

$$\delta_\tau(t) = \frac{u(t) - u(t-\tau)}{\tau}. \qquad (6;\ 1;\ 2)$$

Так как (см. гл. 3 (3; 1; 1)) $u(t) \doteqdot \frac{1}{s}$, а $u(t-\tau) \doteqdot \frac{e^{-\tau s}}{s}$ (по теореме запаздывания), то изображение функции $\delta_\tau(t)$ будет следующее:

$$\delta_\tau(t) \doteqdot \overline{\delta_\tau(s)} = \frac{1 - e^{-\tau s}}{\tau s}. \qquad (6;\ 1;\ 3)$$

Импульсную функцию первого порядка получим как «предел» $\delta_\tau(t)$ при $t \to 0$ (предел не в строго математическом, а в физическом смысле). Механически ее можно истолковать как мгновенно действующую бесконечно-

большую силу с импульсом, равным единице. Она сообщает материальной точке единичной массы единичную мгновенную скорость. Введем для импульсной функции первого порядка обозначение $\delta(t)$. Итак, по определению

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\delta_\tau(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{u(t)-u(t-\tau)}{\tau}. \qquad (6;\ 1;\ 4)$$

В силу определения и свойств функции $\delta(t)$ имеем:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \delta(t)=0 \qquad \text{при } t\neq 0 \\ 2)\ \delta(0)=\infty \\ 3)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt=1. \end{array}\right\} \qquad (6;\ 1;\ 5)$$

Равенство (6; 1; 4) показывает, что формально функцию $\delta(t)$ можно рассматривать как производную от $u(t)$

$$\delta(t)=u'(t). \qquad (6;\ 1;\ 6)$$

Изображение функции $\delta(t)$ мы найдем, переходя к пределу при $t\to 0$ в операционном соотношении (6; 1; 3)

$$\delta(t)\doteq\overline{\delta(s)}=\lim_{\tau\to 0}\overline{\delta_\tau(s)}=\lim_{\tau\to 0}\frac{1-e^{-\tau s}}{\tau s}=1.$$

Итак,

$$\delta(t)\doteq\overline{\delta(s)}=1. \qquad (6;\ 1;\ 7)$$

Заметим, что последнее равенство хорошо увязывается с равенством (6; 1; 6), поскольку $u(t)\doteq\frac{1}{s}$.

Умножение импульсной функции первого порядка на постоянную не требует пояснений.

Запаздывающая импульсная функция первого порядка $\delta(t-\tau)$ определяется равенствами, аналогичными (6; 1; 5):

$$\delta(t-\tau)=0 \text{ при } t \neq \tau; \ \delta(t-\tau)=\infty \text{ при } t=\tau,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)\,dt=1. \qquad (6;\ 1;\ 8)$$

Изображение $\delta(t-\tau)$ определится по теореме запаздывания:

$$\delta(t-\tau) \doteqdot e^{-\tau s}. \qquad (6;\ 1;\ 9)$$

Используя определение импульсной функции первого порядка, нетрудно доказать справедливость следующих равенств ($f(t)$ — непрерывная функция):

$$\delta(t)\,f(t)=f(0)\,\delta(t), \qquad (6;\ 1;\ 10)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,f(t)\,dt=f(0), \qquad (6;\ 1;\ 11)$$

$$\delta(t-\tau)\,f(t)=f(\tau)\,\delta(t-\tau), \qquad (6;\ 1;\ 12)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)\,f(t)\,dt=f(\tau). \qquad (6;\ 1;\ 13)$$

Для доказательства равенства (6; 1; 10) запишем его левую часть в виде

$$\delta(t)\,f(t)=\lim_{\tau\to 0}\delta_{\tau}(t)\,f(t). \qquad (6;\ 1;\ 14)$$

Положим в правой части последнего равенства

$$f(t)=f(0)+[f(t)-f(0)]. \qquad (6;\ 1;\ 15)$$

Заменяя в равенстве (6; 1; 14) $f(t)$ этим выражением и переходя к пределу при $\tau\to 0$, находим

$$\delta(t)f(t)=\lim_{\tau\to 0}\delta_\tau(t)\{f(0)+[f(t)-f(0)]\}=f(0)\lim_{\tau\to 0}\delta_\tau(t)+$$
$$+[f(t)-f(0)]\lim_{\tau\to 0}\delta_\tau(t)=f(0)\delta(t)$$

(поскольку при $t\neq 0$ имеем $\lim\limits_{\tau\to 0}\delta_\tau(t)=0$, а при $t=0$ имеем $f(t)-f(0)=0$).

Аналогично доказывается равенство (6; 1; 12).

Для доказательства равенства (6; 1; 11) используем доказанное нами равенство (6; 1; 10) и последнее из равенств (6; 1; 5):

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\,dt=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(0)\,dt=f(0)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt=f(0).$$

Наконец, равенство (6; 1; 13), если в его левой части сделать замену переменной интегрирования, положив $t-\tau=t_1$, немедленно получается из равенства (6; 1; 11).

§ 2. Импульсная функция второго порядка

Рассмотрим теперь функцию $\delta_\tau^{(1)}(t)$, определенную следующим образом:

$\delta_\tau^{(1)}(t)=\dfrac{1}{\tau^2}$ в промежутке $(0, \tau)$,

$\delta_\tau^{(1)}(t)=-\dfrac{1}{\tau^2}$ в промежутке $(\tau, 2\tau)$,

$\delta_\tau^{(1)}(t)=0$ при $t<0$ и $t>2\tau$.

График этой функции изображен на рис. 33.

Механически эту функцию можно истолковать как силу постоянной величины $\frac{1}{\tau^2}$, действующую в течение промежутка времени τ в одном, а в следующем промежутке той же длительности — в прямо противоположном направлении. Полный импульс этой силы за все время ее действия равен нулю.

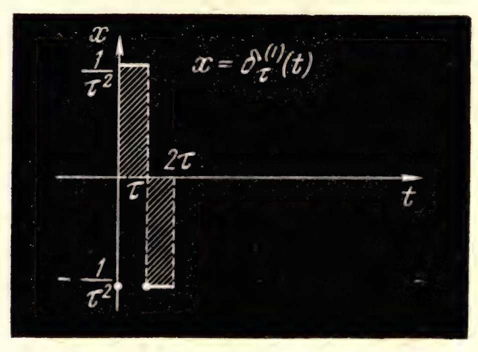


Рис. 33

Если такую силу приложить к материальной точке единичной массы, то она вызовет перемещение этой точки за время своего действия на единицу длины, причем в момент времени $t=2\tau$ движение остановится. Чтобы в этом убедиться, проинтегрируем уравнение движения этой точки (напомним, что масса точки равна единице), предполагая, что движение начинается из состояния покоя

$$\frac{dv}{dt}=\delta_{\tau}^{(1)}(t). \qquad (6;\ 2;\ 1)$$

Для выполнения интегрирования выразим функцию $\delta_{\tau}^{(1)}(t)$, исходя из ее определения через единичные функции,

$$\delta_{\tau}^{(1)}(t)=\frac{1}{\tau^2}\{u(t)-2u(t-\tau)+u(t-2\tau)\}. \qquad (6;\ 2;\ 2)$$

Теперь уравнение (6; 2; 1) перепишется в виде

$$\frac{dv}{dt}=\frac{1}{\tau^2}\{u(t)-2u(t-\tau)+u(\tau-2\tau)\}.$$

Интегрируя, находим (поскольку $v|_{t=0}=0$)

$$v=\frac{1}{\tau^2}\int_0^t\{u(t)-2u(t-\tau)+u(t-2\tau)\}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\tau^2}\left\{\int_0^t u(t)\,dt-2\int_0^t u(t-\tau)\,dt+\int_0^t u(t-2\tau)\,dt\right\}.$$

Но в силу свойств функции $u(t)$ имеем

$$\int_0^t u(t)\,dt=u(t)\int_0^t dt=u(t)\,t,$$

$$\int_0^t u(t-\tau)\,dt=\int_\tau^t u(t-\tau)\,dt=u(t-\tau)\int_\tau^t dt=u(t-\tau)(t-\tau)$$

(поскольку $u(t-\tau)=0$ при $t<\tau$, а при $t>\tau$ $u(t-\tau)=1$). Аналогично,

$$\int_0^t u(t-2\tau)\,dt=\int_{2\tau}^t u(t-2\tau)\,dt=u(t-2\tau)\int_{2\tau}^t dt=u(t-2\tau)\times$$

$$\times(t-2\tau).$$

Итак

$$v=\frac{1}{\tau^2}\{u(t)t-2u(t-\tau)(t-\tau)+u(t-2\tau)(t-2\tau)\}.$$

(6; 2; 3).

Нетрудно убедиться, что при $t\geqslant 2\tau$, $v\equiv 0$. В самом деле, для таких значений t все три единичные функции в правой части равенства (6; 2; 3) равны единице и поэтому имеем

$$v=\frac{1}{\tau^2}\{t-2(t-\tau)+(t-2\tau)\}\equiv 0. \qquad (6;\ 2;\ 4)$$

Итак, в момент времени $t=2\tau$ движение прекращается. Найдем перемещение точки за это время, для чего в равенстве (6; 2; 3) положим $v=\frac{ds}{dt}$ и проинтегрируем еще раз; имеем

$$ds=\frac{1}{\tau^2}\{u(t)\cdot t-2u(t-\tau)(t-\tau)+u(t-2\tau)(t-2\tau)\}\,dt.$$

Выполняя интегрирование и снова учитывая свойства функции $u(t)$, найдем

$$s=\frac{1}{\tau^2}\int_0^t\{u(t)t-2u(t-\tau)(t-\tau)+u(t-2\tau)(t-2\tau)\}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\tau^2}\left\{u(t)\int_0^t t\,dt-2u(t-\tau)\int_\tau^t(t-\tau)dt+\right.$$

$$\left.+u(t-2\tau)\int_{2\tau}^t(t-2\tau)\,dt\right\},$$

или

$$s=\frac{1}{2\tau^2}\{u(t)t^2-2u(t-\tau)\cdot(t-\tau)^2+u(t-2\tau)\cdot(t-2\tau)^2\}. \tag{6; 2; 5}$$

Полагая $t\geqslant 2\tau$, находим

$$s=\frac{1}{2\tau^2}\{t^2-2(t-\tau)^2+(t-2\tau)^2\}\equiv 1. \tag{6; 2; 6}$$

Заметим, что найденные нами равенства (6; 2; 4) и (6; 2; 6) можно записать в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\tau^{(1)}(t)\,dt=0, \tag{6; 2; 4*}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dt\int_{-\infty}^{t}\delta_\tau^{(1)}(t_1)\,dt_1=1. \tag{6; 2; 6*}$$

В самом деле, равенство (6; 2; 4) можно записать следующим образом:

$$\int_0^t\delta_\tau^{(1)}(t)\,dt=0 \quad \text{при} \quad t\geqslant 2\tau,$$

но так как $\delta_\tau^{(1)}=0$ при всяком $t<0$ и $t>2\tau$, то из этого равенства вытекает равенство (6; 2; 4 *).

Аналогично равенство (6; 2; 6) можно записать в виде

$$\int_0^{t^*}dt\int_0^t\delta_\tau^{(1)}(t_1)\,dt_1=1 \quad \text{при} \quad t^*\geqslant 2\tau.$$

Но тогда снова в силу того, что $\delta_\tau^{(1)}(t)=0$ при $t<0$ и $t>2\tau$ из этого последнего равенства вытекает равенство (6; 2; 6 *).

Найдем изображение функции $\delta^{(1)}(t)$, используя ее представление в виде (6; 2; 2).

$$\delta_\tau^{(1)}(t)=\frac{1}{\tau^2}\{u(t)-2u(t-\tau)+u(t-2\tau)\}\doteqdot$$

$$\doteqdot\frac{1}{\tau^2}\left\{\frac{1}{s}-\frac{2e^{-\tau s}}{s}+\frac{e^{-2\tau s}}{s}\right\},$$

или

$$\delta_\tau^{(1)}(t)\doteqdot\overline{\delta_\tau^{(1)}(s)}=\frac{(1-e^{-\tau s})^2}{\tau^2 s}. \qquad (6;\ 2;\ 7)$$

Импульсная функция второго порядка, обозначаемая $\delta_1(t)$, определяется как «предел» $\delta_\tau^{(1)}(t)$ при $\tau\to 0$

$$\delta_1(t)=\lim_{\tau\to 0}\delta_\tau^{(1)}(t). \qquad (6;\ 2;\ 8)$$

В силу этого определения и на основании свойств функции $\delta_\tau^{(1)}(t)$ приходим к следующим свойствам функции $\delta_1(t)$:

$$\left.\begin{aligned}
&1)\ \delta_1(t)\equiv 0 \quad \text{при} \quad t\neq 0,\\
&2)\ \delta_1(0)=\pm\infty,\\
&3)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\delta_1(t)dt=0,\\
&4)\ \int_{-\infty}^{+\infty}dt\int_{-\infty}^{t}\delta_1(t_1)\,dt_1=1.
\end{aligned}\right\} \qquad (6;\ 2;\ 9)$$

Механически функцию $\delta_1(t)$ можно истолковать как две мгновенные последовательно действующие противо-

положно направленные бесконечно-большие силы, вызывающие мгновенное перемещение материальной точки с единичной массой на расстояние, равное единице длины, и не сообщающие этой точке ни скорости, ни ускорения.

Изображение импульсной функции второго порядка $\delta_1(t)$ мы найдем, переходя к пределу при $\tau \to 0$ в операционном соотношении, определяющем изображение $\delta_\tau^{(1)}(t)$

$$\delta_1(t) \doteqdot \overline{\delta_1(s)} = \lim_{\tau \to 0} \overline{\delta_\tau^{(1)}(s)} = \lim_{\tau \to 0} \frac{(1 - e^{-\tau s})^2}{\tau^2 s} = s.$$

Итак,

$$\delta_1(t) \doteqdot \overline{\delta_1(s)} = s. \qquad (6;\ 2;\ 10)$$

Равенство (6; 2; 2) показывает, что функцию $\delta_1(t)$ можно определять следующим образом:

$$\delta_1(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{u(t) - 2u(t - \tau) + u(t - 2\tau)}{\tau^2}.$$

Но правая часть последнего равенства формально определяет $u''(t)$, поэтому можно положить

$$\delta_1(t) = u''(t), \qquad (6;\ 2;\ 11)$$

а на основании равенства (6; 1; 6), в силу которого $u'(t) = \delta(t)$, имеем одновременно

$$\delta_1(t) = \delta'(t). \qquad (6;\ 2;\ 12)$$

Так же как импульсную функцию первого порядка, импульсную функцию второго порядка можно умножать на любой постоянный множитель, а также вводить в рассмотрение функции запаздывающего аргумента $\delta_1(t - \tau)$. При этом мы, очевидно, получим следующие операцион-

ные соотношения:

$$A\delta_1(\tau) \doteqdot As, \qquad (6;\ 2;\ 13)$$

$$\delta_1(t-\tau) \doteqdot se^{-\tau s}. \qquad (6;\ 2;\ 14)$$

Аналогичным образом определяются импульсные функции более высоких порядков $\delta_2(t)$, $\delta_3(t)$ и т. д., изображениями которых будут соответственно s^2, s^3 и т. д.

§ 3. Применение импульсных функций

Рассмотрим примеры.

1. Проинтегрируем (при нулевых начальных условиях) операционными методами следующие два простейших дифференциальных уравнения:

$$\text{а) } x'' = \delta(t-\tau), \quad \text{б) } x'' = \delta_1(t-\tau). \qquad (6;\ 3;\ 1)$$

Строим для них изображающие уравнения:

$$\text{а) } s^2\overline{x(s)} = e^{-\tau s}, \quad \text{б) } s^2\overline{x(s)} = se^{-\tau s}. \qquad (6;\ 3;\ 2)$$

Находим изображения искомых решений:

$$\text{а) } \overline{x(s)} = \frac{1}{s^2}e^{-\tau s}, \quad \text{б) } \overline{x(s)} = \frac{1}{s}e^{-\tau s}. \qquad (6;\ 3;\ 3)$$

Используя теорему запаздывания, находим решения предложенных уравнений:

$$\text{а) } x(t) = u(t-\tau)(t-\tau), \quad \text{б) } x(t) = u(t-\tau). \qquad (6;\ 3;\ 4)$$

Полученные результаты подтверждают приведенные выше истолкования свойств импульсных функций с точки зрения механики:

1) запаздывающая импульсная сила первого порядка $\delta(t-\tau)$ сообщает материальной точке единичной массы,

находившейся первоначально в покое, в момент времени $t-\tau$ постоянную скорость $v=1$;

2) запаздывающая импульсная сила второго порядка $\delta_1(t-\tau)$ сообщает той же материальной точке в аналогичных условиях в момент времени $t=\tau$ мгновенное перемещение единичной длины, не придавая ей ни скорости, ни ускорения.

2. Проинтегрируем дифференциальное уравнение гармонических колебаний (при произвольных начальных условиях) с запаздывающими силами первого и второго порядка в качестве возмущающих сил (для общности при импульсных силах вводим множители v_0 и h):

$$\text{а) } x''+\omega^2 x=v_0\delta(t-\tau), \quad \text{б) } x''+\omega^2 x=h\delta_1(t-\tau) \qquad (6;\ 3;\ 5)$$

при начальных условиях

$$x=x_0,\ x'=x_0' \quad \text{при} \quad t=0.$$

Строим изображающие уравнения:

$$\text{а) } (s^2+\omega^2)\overline{x(s)}=x_0 s+x_0'+v_0 e^{-\tau s}, \text{ б) } (s^2+\omega^2)\overline{x(s)}= =x_0 s+x_0'+hse^{-\tau s}. \qquad (6;\ 3;\ 6)$$

Находим изображения решений:

$$\text{а) } \overline{x(s)}=\frac{x_0 s+x_0'+v_0 e^{-\tau s}}{s^2+\omega^2},$$

$$\text{б) } \overline{x(s)}=\frac{x_0 (s)+x_0'+hse^{-\tau s}}{s^2+\omega^2}. \qquad (6;\ 3;\ 7)$$

По найденным изображениям находим решения предложенных уравнений:

$$\text{а)}\ x(t)=x_0\cos\omega t+\frac{x_0'}{\omega}\sin\omega t+$$
$$+\frac{v_0}{\omega}u(t-\tau)\sin\omega(t-\tau);\qquad(6;\ 3;\ 8)$$
$$\text{б)}\ x(t)=x_0\cos\omega t+\frac{x_0'}{\omega}\sin\omega t+$$
$$+hu(t-\tau)\cos\omega(t-\tau).$$

Как видно из полученных решений, до момента $t=\tau$ оба гармонических колебания (как и следовало ожидать) тождественны, а в момент $t=\tau$ в первом случае движущаяся точка получит мгновенную дополнительную скорость v_0, а во втором — мгновенное дополнительное смещение h, в обоих случаях — с вытекающим отсюда изменением характера дальнейшего движения.

3. Решим аналогичные задачи при наличии сопротивления движению, пропорционального скорости. Уравнения движения (при прежних начальных условиях) будут

$$\text{а)}\ x''+2nx'+\omega^2x=v_0\delta(t-\tau),\ \text{б)}\ x''+2nx'+\omega^2x=$$
$$=h\delta_1(t-\tau).\qquad(6;\ 3;\ 9)$$

Ограничимся случаем затухающих колебаний $(0<n<\omega)$.

Строим изображающие уравнения:

$$\text{а)}\ (s^2+2ns+\omega^2)\overline{x(s)}=(s+2n)x_0+x_0'+v_0e^{-\tau s}$$
$$\text{б)}\ (s^2+2ns+\omega^2)\overline{x(s)}=(s+2n)x_0+x_0'+hse^{-\tau s}\ (6;3;10)$$

Находим изображения решений:

$$\text{а) } \overline{x(s)} = \frac{(s+2n)x_0 + x_0' + v_0 e^{-\tau s}}{s^2 + 2ns + \omega^2} = x_0 \frac{s+n}{(s+n)^2 + (\omega^2 - n^2)} +$$

$$+ \frac{nx_0 + x_0' + v_0 e^{-\tau s}}{(s+n)^2 + (\omega^2 - n^2)};$$

$$\text{б) } \overline{x(s)} = \frac{(s+2n)x_0 + x_0' + hse^{-\tau s}}{s^2 + 2ns + \omega^2} =$$

$$= (x_0 + he^{-\tau s}) \frac{s+n}{(s+n)^2 + (\omega^2 - n^2)} + \frac{nx_0 + x_0' - nhe^{-\tau s}}{(s+n)^2 + (\omega^2 - n^2)}.$$

(6; 3; 11)

По найденным изображениям находим решения предложенных уравнений:

$$\text{а) } x(t) = e^{-nt}\left\{x_0 \cos\sqrt{\omega^2 - n^2}\, t + \frac{nx_0 + x_0'}{\sqrt{\omega^2 - n^2}} \sin\sqrt{\omega^2 - n^2}\, t\right\} +$$

$$+ \frac{v_0}{\sqrt{\omega^2 - n^2}} u(t-\tau) e^{-n(t-\tau)} \sin\sqrt{\omega^2 - n^2}\,(t-\tau);$$

$$\text{б) } x(t) = e^{-nt}\left\{x_0 \cos\sqrt{\omega^2 - n^2}\, t +\right.$$

$$\left. + \frac{nx_0 + x_0'}{\sqrt{\omega^2 - n^2}} \sin\sqrt{\omega^2 - n^2}\, t\right\} +$$

$$+ u(t-\tau) e^{-n(t-\tau)}\left\{h \cos\sqrt{\omega^2 - n^2}\,(t-\tau) -\right.$$

$$\left. - \frac{nh}{\sqrt{\omega^2 - n^2}} \sin\sqrt{\omega^2 - n^2}\,(t-\tau)\right\}.$$

В обоих случаях, как и раньше, до момента $t=\tau$ движения тождественны. В момент $t=\tau$ первая точка под действием импульсной силы первого порядка получает, как и при отсутствии сопротивления, мгновенную дополнительную скорость v_0. Но в движение второй точки, находящейся под действием импульсной силы второго порядка, наличие сопротивления вносит дополнительное искажение: в момент $t=\tau$ эта точка получает не только мгновенное дополнительное смещение h (как и при отсутствии сопротивления), но и мгновенную дополнительную скорость, равную $-2nh$ (чего при отсутствии сопротивления не было). Чтобы в этом убедиться, достаточно продифференцировать x по t и положить $t=\tau$: множитель при $u(t-\tau)$ в выражении для $x'(t)$ обратится при этом в $-2nh$.

Таким образом, наличие сопротивления не оказывает влияния на действие импульсных сил первого порядка, но изменяет характер действия импульсных сил второго порядка, придавая им, в дополнение к своим, функции импульсных сил первого порядка (не только смещение, но и изменение скорости!).

4. Задача. Груз массы m *г* подвешен на пружине жесткостью k *г/см*. В начальный момент ($t=0$) груз выведен из положения статического равновесия, ему сообщена начальная скорость по вертикали и он предоставлен самому себе (начальное отклонение от положения равновесия x_0, начальная скорость x_0'); сопротивлением среды, в которой происходит движение, — пренебрегаем. Какие импульсы первого и второго порядков по направлению движения надо приложить к грузу в момент $t=\tau$, чтобы его движение прекратилось?

Направляя ось Ox по вертикали вниз и помещая начало отсчета в положение статического равновесия груза,

имеем следующее уравнение движения груза:

$$mx'' + kx = A\delta(t-\tau) + B\delta_1(t-\tau). \qquad (6;\ 3;\ 13)$$

Разделим на m и введем обозначения

$$\frac{k}{m} = \omega^2, \quad \frac{A}{m} = v_0, \quad \frac{B}{m} = h.$$

Уравнение (6; 3; 13) приведется к виду

$$x'' + \omega^2 x = v_0\delta(t-\tau) + h\delta_1(t-\tau). \qquad (6;\ 3;\ 13^*)$$

Составляем изображающее уравнение

$$(s^2 + \omega^2)\,\overline{x(s)} = x_0 s + x_0' + v_0 e^{-\tau s} + hse^{-\tau s}. \qquad (6;\ 3;\ 14)$$

Находим изображение решения

$$\overline{x(s)} = \frac{x_0 s + x_0' + e^{-\tau s}(v_0 + hs)}{s^2 + \omega^2}. \qquad (6;\ 3;\ 15)$$

Наконец, по изображению находим само решение

$$x(t) = x_0 \cos\omega t + \frac{x_0'}{\omega}\sin\omega t +$$

$$+ u(t-\tau)\left\{h\cos\omega(t-\tau) + \frac{v_0}{\omega}\sin(t-\tau)\right\}. \qquad (6;\ 3;\ 16)$$

Преобразуем выражение для $x(t)$ при $t>\tau$, т. е. полагая $u(t-\tau)=1$, соберем члены с $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$:

$$x(t) = \left(x_0 + h\cos\omega\tau - \frac{v_0}{\omega}\sin\omega\tau\right)\cos\omega t +$$

$$+\left(\frac{x_0'}{\omega} + h\sin\omega\tau + \frac{v_0}{\omega}\cos\omega\tau\right)\sin\omega t. \qquad (6;\ 3;\ 17)$$

Так как движение должно быть прекращено, приравниваем нулю коэффициенты при $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$ в (6; 3; 17)

$$x_0 + h\cos\omega\tau - \frac{v_0}{\omega}\sin\omega\tau = 0,$$

$$\frac{x_0'}{\omega} + h\sin\omega\tau + \frac{v_0}{\omega}\cos\omega\tau = 0. \qquad (6;\ 3;\ 18)$$

Решая эту систему относительно h и v_0 находим

$$h = -\left(x_0\cos\omega\tau + \frac{x_0'}{\omega}\sin\omega\tau\right) = -\lim_{t\to\tau-0} x(t) = -x(\tau-0),$$

$$v_0 = -(-x_0\omega\sin\omega\tau + x_0'\cos\omega\tau) = -\lim_{t\to\tau-0} x'(t) =$$
$$= -x'(\tau-0). \qquad (6;\ 3;\ 19)$$

Мы пришли к ответу, который легко было предвидеть: грузу надо сообщить такой импульс первого порядка, который погасил бы скорость груза, приобретенную им к моменту $t=\tau$, и такой импульс второго порядка, который возвратил бы груз в положение его статического равновесия, т. е. погасил бы его смещение.

Упражнения

1. Проинтегрировать при нулевых начальных условиях следующие дифференциальные уравнения с импульсными функциями:

а) $x''(t) - x(t) = hu\,(t-\tau) + v_0\delta\,(t-\tau_1)$.

Ответ: $x(t) = hu\,(t-\tau)\,\{\text{ch}\,(t-\tau) - (t-$
$-\tau)\} + v_0 u\,(t-\tau_1)\,\text{sh}\,(t-\tau_1)$;

б) $x'' + x(t) = a\sin t + x_0\delta_1(t-\tau)$.

Ответ: $x(t) = \dfrac{a}{2}\{\sin t - t\cos t\} +$
$+ x_0 u\,(t-\tau)\cos(t-\tau)$;

в) $x'' + 2x' + 2x(t) = ae^t + v_0\delta(t - \tau)$.

$$\textit{Ответ: } x(t) = \frac{a}{5}e^t - \frac{a}{5}e^t\{\cos t + 2\sin t\} + v_0 u(t-\tau)\,e^{t-\tau}\sin(t-\tau).$$

2. Убедиться, что решением уравнения

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n x = \delta(t)$$

при начальных условиях $x_0 = x_0' = x_0'' = \ldots = x_0^{(n-1)} = 0$ при $t=0$ служит функция $\pi(t)$ (оригинал «передаточной» функции $\overline{\pi(s)}$).

7—3209

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ВЫЧИСЛЕНИЮ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ И ИНТЕГРИРОВАНИЮ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Вычисление несобственных интегралов

Рассмотрим три способа вычисления несобственных интегралов методами операционного исчисления.

I. Значения интегралов вида

$$J=\int_0^\infty f(t)\,dt, \qquad (7;\ 1;\ 1)$$

где $f(t)$ — оригинал, для которого известно изображение, можно вычислять, используя теоремы: а) об интегрировании оригинала и б) о связи конечного значения оригинала с начальными значениями изображения (см. гл. 2, § 1 и 5). В самом деле, пусть имеется операционное соотношение

$$f(t) \doteqdot \overline{f(s)},$$

тогда по теореме интегрирования оригинала имеет соотношение

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \doteqdot \frac{1}{s}\,\overline{f(s)}. \qquad (7;\ 1;\ 2)$$

Применяя же к операционному соотношению (7; 1; 2) теорему о связи конечного значения оригинала и начального значения изображения (см. гл. 2, § 5, (2; 5; 12)), которая применима, если интеграл (7; 1; 1) сходится, находим

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t f(\tau)\,d\tau=\int_0^\infty f(t)\,dt,$$

$$\lim_{s\to 0} s\left\{\frac{1}{s}\overline{f(s)}\right\}=\lim_{s\to 0}\overline{f(s)}=\overline{f(0)}$$

и, следовательно,

$$\int_0^\infty f(t)\,dt=\overline{f(0)}. \qquad (7;\ 1;\ 3)$$

Примеры. 1. Мы имели раньше (см. гл. III, § 3) соотношение

$$\frac{\sin t}{t}\doteqdot \operatorname{arctg}\frac{1}{s}.$$

Отсюда, по формуле (7; 1; 3) находим

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt=\lim_{s\to 0}\operatorname{arctg}\frac{1}{s}=\frac{\pi}{2}.$$

2. Там же мы нашли формулу

$$\frac{\sin^2 t}{t^2}\doteqdot \operatorname{arc\,tg}\frac{2}{s}-\frac{1}{2}\;s\ln\;\frac{\sqrt{s^2+4}}{s}.$$

Отсюда, применяя снова формулу (7; 1; 3) и учитывая, что

$$\lim_{s\to 0} \operatorname{arc\,tg} \frac{2}{s} = \frac{\pi}{2}; \quad \lim_{s\to 0} s \ln \frac{\sqrt{s^2+4}}{s} = 0,$$

найдем

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

3. Используем операционное соотношение

$$e^{-\alpha t} - e^{-\beta t} \doteqdot \frac{1}{s+\alpha} - \frac{1}{s+\beta}.$$

Применяя теорему интегрирования изображения, получим

$$\frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} \doteqdot \int_s^\infty \left\{\frac{1}{s+\alpha} - \frac{1}{s+\beta}\right\} ds = \ln \frac{s+\beta}{s+\alpha}.$$

Отсюда, по формуле (7; 1; 3) имеем

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t}\,dt = \ln \frac{\beta}{\alpha}.$$

(Предполагается, что $\alpha > 0$, $\beta > 0$, что является условием сходимости рассматриваемого интеграла.)

II. Рассмотрим интегралы вида

$$J(t) = \int_0^\infty f(u)\,F(t; u)\,du, \qquad (7;\ 1;\ 4)$$

где $F(t;\ u)$ — оригинал, зависящий от параметра u, для всех значений $u \geqslant 0$ удовлетворяющий третьему условию

изображаемости

$$|F(t;u)| < Me^{\sigma_0 t} \qquad (7;\ 1;\ 5)$$

(M и σ_0 — постоянные, не зависящие от u).

Если функция $f(u)$ такова, что $J(t)$ также является оригиналом, то операционное соотношение

$$F(t;u) \doteqdot \overline{F(s;u)}, \qquad (7;\ 1;\ 6)$$

можно, после умножения на $f(u)$, интегрировать по параметру u в пределах от нуля до бесконечности

$$\int_0^\infty f(u) F(t;u)\,du \doteqdot \int_0^\infty f(u)\overline{F(s,u)}\,du. \qquad (7;\ 1;\ 7)$$

Поскольку это последнее соотношение определяет изображение искомого интеграла $J(t)$

$$J(t) \doteqdot \overline{J(s)} = \int_0^\infty f(u)\overline{F(s,u)}\,du, \qquad (7;\ 1;\ 8)$$

то, если интеграл в правой части равенства (7; 1; 8) можно вычислить, для отыскания $J(t)$ достаточно применить один из известных способов отыскания функции по ее изображению.

Примеры. 1. Вычислить интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\cos tu}{\alpha^2 + u^2}\,du.$$

Условия применимости предыдущего способа полностью выполнены. Имеем

$$\cos tu \doteqdot \frac{s}{s^2 + u^2},$$

поэтому

$$\int_0^\infty \frac{\cos tu\,du}{\alpha^2+u^2} \risingdotseq \int_0^\infty \frac{s\,du}{(\alpha^2+u^2)(s^2+u^2)} = \frac{\pi}{2\alpha}\cdot\frac{1}{s+\alpha}.$$

В самом деле, имеем

$$\int_0^\infty \frac{s\,du}{(s^2+u^2)(\alpha^2+u^2)} = \frac{s}{s^2-\alpha^2}\int_0^\infty\left\{\frac{1}{\alpha^2+u^2}-\frac{1}{s^2+u^2}\right\}du =$$

$$= \frac{s}{s^2-\alpha^2}\left\{\frac{1}{\alpha}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{\alpha}-\frac{1}{s}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{s}\right\}\Bigg|_0^\infty =$$

$$= \frac{s}{s^2-\alpha^2}\left\{\frac{\pi}{2\alpha}-\frac{\pi}{2s}\right\} = \frac{\pi}{2\alpha}\cdot\frac{1}{s+\alpha};$$

но $\frac{1}{s+\alpha} \risingdotseq e^{-\alpha t}$,

отсюда $\int_0^\infty \frac{\cos tu\,du}{\alpha^2+u^2} = \frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha t}$.

2. Вычислить интеграл $\int_0^\infty \sin(tu^2)\,du$.

По таблице изображений имеем

$$\sin tu^2 \risingdotseq \frac{u^2}{s^2+u^4},$$

поэтому

$$\int_0^\infty \sin tu^2\,du \risingdotseq \int_0^\infty \frac{u^2\,du}{s^2+u^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2s}}.$$

(Значение интеграла в правой части последнего равенства может быть легко найдено либо элементарными методами, либо с помощью теоремы вычетов.) Но по формуле (3; 2; 1) гл. 3 имеем $\left(\text{при } m = -\frac{1}{2}\right)$:

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \risingdotseq \frac{\Gamma\frac{1}{2}}{\sqrt{s}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

(мы использовали приведенное во введении значение $\left(\Gamma\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\right)$.

Тогда

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2s}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{s}} \risingdotseq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}},$$

поэтому находим окончательно

$$\int_0^\infty \sin(tu^2)\,du = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2t}},$$

а полагая $t = 1$, находим значение интеграла Френеля

$$\int_0^\infty \sin(u^2)\,du = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

III. Третий способ вычисления интегралов основан на применении теоремы Парсеваля. Пусть имеются операционные соотношения

$$f_1(t) \risingdotseq \overline{f_1(s)}, \qquad f_2(t) \risingdotseq \overline{f_2(s)}, \tag{7; 1; 9}$$

причем оба изображения $\overline{f_1(s)}$ и $\overline{f_2(s)}$ регулярны при $\mathrm{Re}(s) > 0$. Тогда справедливо равенство

$$\int_0^\infty f_1(v)\overline{f_2(v)}\,dv = \int_0^\infty f_2(v)\overline{f_1(v)}\,dv. \qquad (7;\ 1;\ 10)$$

Для доказательства этого равенства в обеих частях формулы (7; 1; 10) заменим функции $\overline{f_1(v)}$ и $\overline{f_2(v)}$, исходя из соотношений (7; 1; 9), их выражениями через интеграл Лапласа:

$$\overline{f_1(v)} = \int_0^\infty e^{-vt} f_1(t)\,dt,$$

$$\overline{f_2(v)} = \int_0^\infty e^{-vt} f_2(t)\,dt.$$

Интегралы, входящие в равенство (7; 1; 10), преобразуются к следующему виду:

$$\int_0^\infty f_1(v)\overline{f_2(v)}\,dv = \int_0^\infty f_1(v)\,dv \int_0^\infty e^{-vt} f_2(t)\,dt =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-vt} f_{1(v)} f_2(t)\,dv\,dt,$$

$$\int_0^\infty f_2(v)\overline{f_1(v)}\,dv = \int_0^\infty f_2(v)\,dv \int_0^\infty e^{-vt} f_1(t)\,dt =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-vt} f_1(t) f_2(v)\,dv\,dt.$$

Поскольку интегралы в правых частях последних равенств отличаются друг от друга только обозначением переменных интегрирования, равенство (7; 1; 10), выражающее теорему Парсеваля, доказано. Теорема Парсеваля позволяет заменять вычисление одного из интегралов (7; 1; 10) вычислением равного ему другого.

Примеры. 1. Имеем операционные соотношения

$$\sin t \doteq \frac{1}{1+s^2}, \ u(t) \doteq \frac{1}{s}.$$

По формуле (7; 1; 10) находим

$$\int_0^\infty \frac{\sin v}{v}\, dv = \int_0^\infty \frac{u(v)\, dv}{1+v^2} = \int_0^\infty \frac{dv}{1+v^2} = \frac{\pi}{2}.$$

2. Имеем операционные соотношения

$$e^{-\alpha t} \sin \beta t \doteq \frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2} \quad (\alpha > 0, \quad \beta > 0), \ u(t) \doteq \frac{1}{s}.$$

Аналогично предыдущему находим

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha v} \sin \beta v\, dv}{v} = \int_0^\infty \frac{u(v)\, \beta\, dv}{(v+\alpha)^2+\beta^2} =$$

$$= \operatorname{arc\,tg} \frac{v+\alpha}{\beta} \Bigg|_0^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha}{\beta} = \operatorname{arc\,tg} \frac{\beta}{\alpha}.$$

3. Используя операционные соотношения

$$\cos \alpha t - \cos \beta t \doteq \frac{s}{s^2+\alpha^2} - \frac{s}{s^2+\beta^2}, \quad u(t) \doteq \frac{1}{s},$$

находим по формуле (7; 1; 10)

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha v - \cos \beta v}{v}\, dv = \int_0^\infty u(v) \left\{\frac{v}{v^2+\alpha^2} - \frac{v}{v^2+\beta^2}\right\} dv =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{v^2+\alpha^2}{v^2+\beta^2}\Bigg|_0^\infty = \ln \frac{\beta}{\alpha}.$$

§ 2. Интегрирование одного класса линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

Используя теоремы о дифференцировании оригинала и о свертывании изображений (см. гл. 2, § 4), можно построить изображающее уравнение для любого дифференциального уравнения с переменными коэффициентами, лишь бы сами коэффициенты этого уравнения были изображаемыми функциями (оригиналами). Но в общем случае такое изображающее уравнение будет интегральным и, следовательно, более сложным, чем исходное дифференциальное. Исключением является случай, когда коэффициентами исходного уравнения служат многочлены относительно аргумента t, в силу чего при построении изображающего уравнения можно применить не теорему свертывания изображений, а теорему дифференцирования изображений (см. гл. 2, § 2). В этом случае изображающее уравнение также окажется дифференциальным (коэффициентами которого будут служить многочлены относительно аргумента изображения s), причем его порядок будет равен показателю высшей относительно t степени коэффициентов исходного уравнения.

Не будем касаться весьма сложного вопроса о том, в каких случаях применение операционных методов к оты-

сканию решения исходного дифференциального уравнения законно, иными словами, в каких случаях искомое решение изображаемо. Отметим лишь, что если при помощи изображающего уравнения удастся найти изображение искомого решения, и это изображение будет удовлетворять всем перечисленным в первой главе условиям существования для него оригинала, то оригинал этого изображения будет искомым решением исходного дифференциального уравнения.

Наиболее целесообразно применять операционные методы к интегрированию линейных дифференциальных уравнений типа Эйлера, т. е. к уравнениям вида

$$\sum_{k=0}^{k=n} (a_k t + b_k)\, x^{(n-k)}(t) = f(t), \qquad (7;\ 2;\ 1)$$

где a_k и b_k — постоянные коэффициенты, $f(t)$ — оригинал. Это уравнение формально в качестве изображающего уравнения, всегда имеет линейное дифференциальное уравнение первого порядка, т. е. уравнение, интегрируемое в квадратурах (хотя далеко не всегда в конечном виде). Если в результате интегрирования изображающего уравнения получим изображение искомого решения, по которому может быть найден оригинал, то задача решена, в противном же случае операционные методы бессильны.

Заметим, что постоянные интегрирования в интеграле изображающего уравнения как в общем случае, так и в случае уравнения Эйлера (когда эта постоянная одна) легко могут быть определены по начальным условиям для исходного уравнения на основании теоремы о связи начального значения оригинала с конечным значением изображения (см. гл. 2, § 5).

Рассмотрим пример. Пусть требуется проинтегрировать уравнение

$$(t+1)x''-(3t+4)x'+(2t+4)x=0 \qquad (7;\ 2;\ 2)$$

при произвольных начальных условиях

$$x=x_0, \quad x'=x'_0,$$

если $t=0$.

Построим изображающее уравнение. Имеем соотношения:

$$x(t) \doteqdot \overline{x(s)},$$

$$x'(t) \doteqdot s\overline{x(s)}-x_0,$$

$$x''(t) \doteqdot s^2\overline{x(s)}-sx_0-x'_0.$$

Перепишем исходное уравнение в виде

$$t(x''-3x'+2x)+(x''-4x'+4x)=0. \qquad (7;\ 2;\ 3)$$

Находим изображения

$$x''-4x'+4x \doteqdot (s^2-4s+4)\overline{x(s)}-(s-4)x_0-x'_0,$$

$$x''-3x'+2x \doteqdot (s^2-3s+2)\overline{x(s)}-(s-3)x_0-x'_0.$$

Применяя к последнему операционному соотношению теорему дифференцирования изображения, находим

$$t(x''-3x'+2x) \doteqdot -\frac{d}{ds}\Big\{(s^2-3s+2)\overline{x(s)}-$$

$$-(s-3)x_0-x'_0\Big\},$$

или

$$t(x''-3x'+2x)\doteqdot-(s^2-3s+2)\frac{d\overline{x(s)}}{ds}-$$

$$-(2s-3)\overline{x(s)}+x_0;$$

Внося в уравнение (7; 2; 3) вместо функций их изображения, находим изображающее уравнение

$$(s^2-3s+2)\frac{d\overline{x(s)}}{ds}-(s^2-6s+7)\overline{x(s)}=-sx_0+(5x_0-x_0').$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\overline{x(s)}=\frac{Ce^s}{(s-1)^2(s-2)}+\frac{s^2x_0+s\left(x_0'-4x_0\right)+x_0}{(s-1)^2(s-2)}.$$

Из условия (вытекающего из теоремы о связи начального значения оригинала и конечного значения изображения)

$$\lim_{s\to\infty}s\,\overline{x(s)}=x_0$$

находим $C=0$.

Таким образом, окончательно находим изображение искомого решения

$$\overline{x(s)}=\frac{s^2x_0+s\left(x_0'-4x_0\right)+x_0}{(s-1)^2(s-2)}.$$

По найденному изображению без труда с помощью третьей теоремы разложения находим и само решение предложенного уравнения:

$$x(t)=(2x_0'-3x_0)e^{2t}+(2x_0-x_0')e^t(t+2),$$

или, полагая в силу произвольности начальных условий,

$$2x_0' - 3x_0 = C_1, \quad 2x_0 - x_0' = C_2,$$

$$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^t (t+2)$$

— общее решение данного уравнения.

§ 3. Интегрирование линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

Во многих прикладных вопросах, в частности в теории автоматического регулирования, в последние десятилетия все чаще возникает необходимость в интегрировании так называемых дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Такое название в математике дается дифференциальным уравнениям, в которые входят не только значения неизвестной функции и ее производных, соответствующие значению аргумента t, но и их значения для некоторых предшествующих значений аргумента $t-\tau_1$, $t-\tau_2, \ldots, t-\tau_k$. Лишь старшая производная неизвестной функции входит в уравнение только с аргументом t. Запаздывания τ_1, $\tau_2, \ldots, \tau_k$ в свою очередь могут быть заданными неотрицательными функциями аргумента t. (Существуют и другие типы уравнений с отклоняющимся аргументом — уравнения с опережающим аргументом, уравнения нейтрального, или смешанного типа, но мы их рассматривать не будем.) С точки зрения операционного исчисления интерес представляют только линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и постоянным запаздыванием, т. е. уравнения вида

$$x^{(n)}(t) + \sum_{j=1}^{j=n} \sum_{r=0}^{r=k} a_{jr} x^{(n-j)}(t-\tau_r) = f(t), \qquad (7;\ 3;\ 1)$$

где все коэффициенты a_{jr} и все запаздывания τ_r постоянны ($\tau_k > \tau_{k-1} > \ldots > \tau_1 > \tau_0 = 0$), а функция $f(t)$ — оригинал.

Операционными методами уравнения вида (7; 3; 1) можно интегрировать в двух случаях:

если считать, как это принято в операционном исчислении для всяких оригиналов, что $x^{(n-j)}(t-\tau_r) \equiv 0$ при $t < \tau_r$, т. е. если уравнение (7; 3; 1) можно переписать в виде

$$x^{(n)}(t) + \sum_{j=1}^{j=n} \sum_{r=0}^{r=k} a_{jr} u(t-\tau_r) x^{(n-j)}(t-\tau_r) = f(t), \quad (7; 3; 1^*)$$

где $u(t-\tau_r)$ — единичная функция запаздывающего аргумента. Это допущение вполне соответствует характеру некоторых задач, которые приводят к уравнениям с запаздывающим аргументом (члены с запаздыванием — это дополнительные регулирующие силы, которые включаются по мере того, как включаются соответствующие запаздывающие сигналы);

если считать, что данное уравнение описывает процесс лишь для значений $t > \tau_k$, где τ_k — наибольшее из запаздываний, а для значений $t \leqslant \tau_k$ значение $x(t)$ задано в виде некоторой, n раз дифференцируемой функции $x(t) = \varphi(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant \tau_k$. Функция $\varphi(t)$ называется в этом случае *начальной.*

Разберем оба случая:

1. Используя теорему запаздывания (см. гл. 2, § 3), нетрудно построить изображающее уравнение для уравнения (7; 3; 1*) и из него найти изображение искомого решения. Но найти по полученному изображению оригинал в конечном виде чаще всего не удается. Поэтому обычно в этом случае пытаются построить решение, разлагая его тем или иным способом в бесконечный ряд.

Покажем на двух примерах идею интегрирования уравнений указанного типа.

Примеры. 1. Дано уравнение

$$x''(t)+2\alpha x'(t)+\alpha^2 x(t)+\lambda u(t-\tau)\{x'(t-\tau)+\alpha x(t-\tau)\}=0$$

с начальными условиями при $t=0$ $x=x_0$, $x'=-\alpha x_0$. Строим изображающее уравнение

$$x''(t)+2\alpha x'(t)+\alpha^2 x(t)\doteqdot(s^2+2\alpha s+\alpha^2(\overline{x(s)}-(s+\alpha)x_0,$$

$$\lambda u(t-\tau)[x'(t-\tau)+\alpha x(t-\tau)\doteqdot\lambda e^{-\tau s}[(s+\alpha)\overline{x(s)}-x_0].$$

Таким образом, изображающее уравнение приводится к виду

$$[(s^2+2\alpha s+\alpha^2)+\lambda(s+\alpha)e^{-\tau s}]\overline{x(s)}=[(s+\alpha)+\lambda e^{-\tau s}]x_0.$$

Отсюда находим, что

$$\overline{x(s)}=\frac{(s+\alpha)+\lambda e^{-\tau s}}{(s+\alpha)^2+\lambda(s+\alpha)e^{-\tau s}}x_0=\frac{x_0}{s+\alpha},$$

и, следовательно,

$$x(t)=x_0e^{-\alpha t}.$$

Нетрудно убедиться, что найденная функция действительно является искомым решением предложенного уравнения.

2. Дано уравнение

$$x''(t)-2\alpha x'(t)+\alpha^2 x(t)+\lambda u(t-\tau)x(t-\tau)=0;$$

начальные условия — произвольные, т. е. при $t=0$, $x=x_0$, $x'=x_0'$.

Изображающее уравнение имеет вид

$$[s^2-2\alpha s+\alpha^2+\lambda e^{-\tau s}]\overline{x(s)}=(s-2\alpha)x_0+x_0',$$

откуда

$$\overline{x(s)}=\frac{(s-2\alpha)\,x_0+x_0'}{(s-\alpha)^2+\lambda e^{-\tau s}}. \qquad (7;\ 3;\ 2)$$

Используя формулу обращения, искомому решению можно придать вид

$$x(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{(s-2\alpha)\,x_0+x_0'}{(s-\alpha)^2+\lambda e^{-\tau s}}\,e^{st}\,ds,$$

но выразить его через элементарные функции не удастся. В то же время по изображению (7; 3; 2) оригинал можно построить следующими двумя способами:

а) Пусть корни знаменателя изображения (7; 3; 2) будут $s=s_j$ ($j=1,\ 2,\ \ldots$). Примем, что все они простые и что тем или иным способом мы их нашли. Вычет функции $\overline{x(s)}e^{st}$ в точке $s=s_j$ будет определяться формулой

$$\operatorname*{Res}_{s=s_j}\left[\overline{x(s)}e^{st}\right]=\frac{(s_j-2\alpha)\,x_0+x_0'}{2\,(s_j-\alpha)-\lambda\tau e^{-\tau s_j}}\,e^{s_j t},$$

в силу чего решение предложенного уравнения по третьей теореме разложения запишется в виде

$$x(t)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(s_j-2\alpha)\,x_0+x_0'}{2\,(s_j-\alpha)-\lambda\tau e^{-\tau s_j}}\,e^{s_j t}. \qquad (7;\ 3;\ 3)$$

Для определения вычета функции комплексного переменного $f(s)=\frac{\varphi(s)}{\psi(s)}$ в ее простом полюсе $s=s_j$, т. е. простом корне знаменателя $\psi(s)$, мы воспользовались формулой

$$\operatorname*{Res}_{s=s_j}\frac{\varphi(s)}{\psi(s)}=\frac{\varphi(s_j)}{\psi'(s_j)}.$$

Примечание. Уравнение $(s-\alpha)^2+\lambda e^{-\tau s}=0$ может иметь двойной корень $s=s_0$ только тогда, когда одновременно выполняются условия

$$(s_0-\alpha)^2+\lambda e^{-\tau s_0}=0,$$

$$2(s_0-\alpha)-\lambda\tau e^{-\tau s_0}=0.$$

Таким образом, $s_0=\alpha-\dfrac{2}{\tau}$, т. е. двойной корень может быть лишь один, и условие его существования, после исключения s_0, приводится к виду $4+\lambda\tau^2 e^{2-\tau\alpha}\equiv 0$. Если это условие выполнено, то вычет в двойном полюсе $s=s_0$ надо определять по формуле

$$\operatorname*{Res}_{s=s_0}\left[\overline{x(s)}\,e^{st}\right]=\lim_{s\to s_0}\frac{d}{ds}\left[(s-s_0)^2\,\overline{x(s)}\,e^{st}\right].$$

б) Запишем изображение искомого решения (7; 3; 2) в следующем виде:

$$\overline{x(s)}=\frac{(s-\alpha)\,x_0+\left(x_0'-\alpha x_0\right)}{(s-\alpha)^2+\lambda e^{-\tau s}}=$$

$$=\left\{1+\frac{\lambda}{(s-\alpha)^2}\,e^{-\tau s}\right\}^{-1}\left\{\frac{x_0}{s-\alpha}+\frac{x_0'-\alpha x_0}{(s-\alpha)^2}\right\}$$

и развернем первый множитель правой части по степеням $e^{-\tau s}$

$$\overline{x(s)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\lambda^n}{(s-\alpha)^{2n}}\,e^{-n\tau s}\left\{\frac{x_0}{s-\alpha}+\frac{x_0'-\alpha x_0}{(s-\alpha)^2}\right\}.$$

Применяя теорему запаздывания для отыскания оригинала правой части, находим

$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\lambda^n u(t-n\tau)\left\{x_0\frac{(t-n\tau)^{2n}}{(2n)!}\,e^{\alpha(t-n\tau)}+\right.$$

$$\left.+\left(x_0'-\alpha x_0\right)\frac{(t-n\tau)^{2n+1}}{(2n+1)!}\,e^{\alpha(t-n\tau)}\right\}. \qquad (7;\ 3;\ 4)$$

Это другая форма записи решения предложенного уравнения, которая может оказаться более удобной в практическом отношении.

2. Интегрирование линейного уравнения с запаздывающим аргументом в случае постановки задачи второго типа (с начальной функцией) рассмотрим на примерах.

Пусть дано уравнение

$$x''(t)+\alpha x'(t)+\beta x(t-\tau)=0, \qquad (7;\ 3;\ 5)$$

с начальным условием $x(t)=\varphi(t)$ при $0\leqslant t\leqslant\tau$. Предполагая функцию $\varphi(t)$ дважды дифференцируемой на отрезке $[0,\ \tau]$, заменим уравнение (7; 3; 5) вместе с его начальным условием следующим:

$$x''(t)+\alpha x'(t)+\beta u(t-\tau)\,x(t-\tau)=$$
$$=\{u(t)-u(t-\tau)\}\{\varphi''(t)-\alpha\varphi'(t)\}, \qquad (7;\ 3\ 6)$$

с начальными условиями при $t=0$, $x=x_0=\varphi(0)$, $x'=x_0'=\varphi'(0)$. Нетрудно убедиться в равносильности уравнений (7; 3; 5) и (7; 3; 6) (каждого с его начальными условиями). В самом деле при $0\leqslant t\leqslant\tau$ в силу того, что $u(t)\equiv1$ и $u(t-\tau)\equiv0$ уравнение (7; 3; 6) приводится к виду $x''(t)+\alpha x'(t)=\varphi''(t)+\alpha\varphi'(t)$ и, в соответствии с теоремой Коши, имеет единственное решение $x=\varphi(t)$, удовлетворяющее поставленным начальным условиям. При $t>\tau$ уравнение (7; 3; 6) превращается в уравнение

(7; 3; 5), поскольку $u(t)=u(t-\tau)\equiv 1$. Таким образом уравнения (7; 3; 5) и (7; 3; 6) равносильны.

Строим для уравнения (7; 3; 6) его изображающее уравнение. Изображение правой части определится следующим образом:

$$\{u(t)-u(t-\tau)\}\{\varphi''(t)+\alpha\varphi'(t)\} \doteqdot \int_0^\infty e^{-st}\{u(t)-u(t-\tau)\}\times$$

$$\times\{\varphi''(t)+\alpha\varphi'(t)\}\,dt=\int_0^\tau e^{-st}\{\varphi''(t)-\alpha\varphi'(t)\}\,dt=$$

$$=[e^{-st}\{\varphi'(t)+(s+\alpha)\varphi(t)]\Big|_0^\tau+(s^2+\alpha s)\int_0^\tau e^{-st}\varphi(t)\,dt=$$

$$=e^{-\tau s}\{\varphi'(\tau)+(s+\alpha)\varphi(\tau)\}-\{\varphi'(0)+(s+\alpha)\varphi(0)\}+$$

$$+(s^2+\alpha s)\int_0^\tau e^{-st}\varphi(t)\,dt.$$

Введем обозначение

$$\overline{\varphi(s)}=\int_0^\tau e^{-st}\varphi(t)\,dt$$

(таким образом, через $\overline{\varphi(s)}$ обозначено изображение функции, равной начальной $\varphi(t)$ на интервале запаздывания $[0,\tau]$ и равной нулю вне этого интервала). Вводя для изображения искомого решения, как всегда, обозначение $\overline{x(s)}$ приходим таким образом к следующему изображающему уравнению:

$$\{s^2+\alpha s+\beta e^{-\tau s}\}\,\overline{x(s)}-\{\varphi'(0)+s\varphi(0)+\alpha\varphi(0)\}=$$

$$=e^{-\tau s}\{\varphi'(\tau)+(s+\alpha)\varphi(\tau)\}-\{\varphi'(0)+(s+\alpha)\varphi(0)\}+$$

$$+(s^2+\alpha s)\overline{\varphi(s)},$$

или, после отбрасывания равных слагаемых в обеих частях уравнения, к уравнению

$$\{s^2+\alpha s+\beta e^{-\tau s}\}\overline{x(s)}=e^{-\tau s}\{\varphi'(\tau)+(s+\alpha)\varphi(\tau)\}+$$
$$+(s^2+\alpha s)\overline{\varphi(s)}.$$

Отсюда находим изображение искомого решения

$$\overline{x(s)}=\frac{e^{-\tau s}\{\varphi'(\tau)+(s+\alpha)\varphi(\tau)\}+(s^2+\alpha s)\overline{\varphi(s)}}{s^2+\alpha s+\beta e^{-\tau s}}. \qquad (7;3;7)$$

Само решение предложенного уравнения может быть записано либо при помощи формулы обращения, либо если это возможно, разложено в ряд одним из тех двух способов, которые были рекомендованы для уравнений первого типа.

Рассмотрим два примера. **1.** $x''(t)+x'(t)+$

$$+\sqrt{2}x\left(t-\frac{\pi}{4}\right)=0; \quad \text{при} \quad 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{4}, \ x(t)=\sin t.$$

В данном случае $\alpha=1$, $\beta=\sqrt{2}$; $\tau=\dfrac{\pi}{4}$.

Найдем $\overline{\varphi(s)}$; $\overline{\varphi(s)}=\displaystyle\int_0^{\pi/4} e^{-st}\sin t\,dt=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}(s+1)e^{-\frac{\pi s}{4}}}{1+s^2}$;

$$\varphi(\tau)=\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \varphi'(t)=\varphi'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Вносим все эти значения в формулу (7; 3; 7), находим

$$\overline{x(s)} = \frac{\frac{s^2+s}{s^2+1}\left[1-\frac{\sqrt{2}}{2}(s+1)e^{-\frac{\pi s}{4}}\right]+e^{-\frac{\pi s}{4}}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+(s+1)\frac{\sqrt{2}}{2}\right]}{s^2+s+\sqrt{2}e^{-\frac{\pi s}{4}}} =$$

$$= \frac{s^2+s+\sqrt{2}e^{-\frac{\pi s}{4}}}{(s^2+1)\left(s^2+s+\sqrt{2}e^{-\frac{\pi s}{4}}\right)} = \frac{1}{s^2+1}.$$

Таким образом, $x(t) = \sin t$ (при всех $t > 0$) (в правильности полученного решения легко убедиться подстановкой в исходное уравнение).

2. $x''(t) + k^2 x(t-\tau) = 0$; при $0 \leqslant t \leqslant \tau$, $x(t) = 1$.

В данном случае $\alpha = 0$, $\beta = k^2$; $\overline{\varphi(s)} = \int\limits_0^\tau e^{-st}\,dt =$

$$= \frac{1-e^{-\tau s}}{s}; \quad \varphi(\tau) = 1; \quad \varphi'(\tau) = 0;$$

$$\overline{x(s)} = \frac{s^2\frac{1-e^{-\tau s}}{s} + e^{-\tau s}\cdot s}{s^2+k^2e^{-\tau s}} = \frac{s}{s^2+k^2e^{-\tau s}}.$$

Перепишем $\overline{x(s)}$ в виде $\overline{x(s)} = \left\{1 + \frac{k^2}{s^2}e^{-\tau s}\right\}^{-1}\cdot\frac{1}{s}$

и развернем в ряд

$$\overline{x(s)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{k^{2n}}{s^{2n+1}}e^{-n\tau s}.$$

Применяя теорему запаздывания, находим решение предложенного уравнения

$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \; u \; (t-n\tau) \; \frac{k^{2n}(t-n\tau)^{2n}}{(2n)!}.$$

К задачам второго типа относительно линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом особенно часто приходят в теории автоматического регулирования; при этом исследователя часто не интересует само решение полученного уравнения, а лишь вопрос о его «асимптотической» устойчивости; иными словами, исследователю достаточно получить ответ на вопрос о том, будет ли решение полученного уравнения удовлетворять условию

$$\lim_{t\to\infty} x(t)=0.$$

Чтобы ответить на этот вопрос нет необходимости искать само решение, так как решить его можно опираясь только на изображение искомого решения (которое, как мы убедились, найти всегда можно). А именно, можно доказать, что решение будет асимптотически устойчиво, если все полюса его изображения лежат слева от мнимой оси плоскости s, т. е. удовлетворяют условию

$$\operatorname{Re}\{s_j\} \leqslant \alpha < 0 \quad \text{при} \quad j=1, 2, \ldots.$$

Существует много различных методов исследования расположения полюсов данной функции комплексного переменного на плоскости, причем все они достаточно сложны. Излагать мы их не будем, отсылая читателя к специальным руководствам по теории функций комплексного переменного и по теории автоматического регулиро-

вания. Некоторые указания по этому вопросу читатель может найти в книге проф. Л. Э. Эльсгольца «Качественные методы в математическом анализе», гл. V. В этой книге, кстати, подробно излагаются некоторые общие вопросы качественной теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.

§ 4. Интегрирование линейных уравнений в частных производных

В связи с тем, что операционные соотношения между оригиналами и их изображениями можно дифференцировать по параметру (см. гл. 2, § 6), операционные методы можно применять для интегрирования линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Имея, например, линейное уравнение, в котором неизвестная функция зависит от двух аргументов, можно по одному из аргументов построить соответствующее изображающее уравнение, которое окажется уже обыкновенным дифференциальным уравнением в отношении изображения по второму аргументу исходного уравнения. Интегрируя изображающее уравнение (непосредственно или снова операционными методами), находим изображение искомого решения, по которому затем обычными методами — и само решение.

Рассмотрим примеры. **1**. Требуется проинтегрировать уравнение малых поперечных колебаний струны конечной длины l

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (7;\ 4;\ 1)$$

Граничные условия

$$u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

Начальные условия

$$u(x, 0)=f(x); \quad \left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0. \qquad (7;\ 4;\ 2)$$

(Для упрощения задачи принято, что в начальный момент, т. е. при $t=0$ струна выведена из состояния покоя, но точкам ее никаких начальных скоростей не сообщено.)

Строим изображающее уравнение для уравнения (7; 4; 1) по аргументу t; положим

$$u(x, t) \doteqdot \overline{u(x, s)},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \doteqdot \frac{\partial^2 \overline{u(x, s)}}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \doteqdot s^2\, \overline{u(x, s)} - su(x, 0) - \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} =$$

$$= s^2\, \overline{u(x, s)} - sf(x).$$

Внося изображения в уравнение (7; 1; 1), находим

$$s^2\, \overline{u(x, s)} - sf(x) = a^2 \frac{\partial^2 \overline{u(x, s)}}{\partial x^2},$$

или

$$\frac{\partial^2 \overline{u(x, s)}}{\partial x^2} - \frac{s^2}{a^2}\, \overline{u(x, s)} = -\frac{s}{a^2} f(x). \qquad (7;\ 4;\ 3)$$

Получили обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с аргументом x, в котором s играет роль параметра.

Общее решение этого уравнения (7; 4; 3) имеет вид

$$\overline{u(x, s)} = C_1 \operatorname{ch} \frac{s}{a} x + C_2 \operatorname{sh} \frac{s}{a} x -$$

$$- \frac{1}{a} \int_0^x f(y) \operatorname{sh} \frac{s}{a} (x - y)\, dy.$$

В силу граничных условий имеем (поскольку изображением нуля является нуль):

$$\overline{u(0, s)} = C_1 = 0,$$

$$\overline{u(l, s)} = C_2 \operatorname{sh} \frac{s}{a} l - \frac{1}{a} \int_0^l f(y) \operatorname{sh} \frac{s}{a} (l - y)\, dy = 0.$$

Таким образом,

$$C_2 = \frac{1}{a \operatorname{sh} \frac{s}{a} l} \int_0^l f(y) \operatorname{sh} \frac{s}{a} (l - y)\, dy.$$

Итак, изображением искомого решения служит функция

$$\overline{u(x, s)} = \frac{\operatorname{sh} \frac{s}{a} x}{a \operatorname{sh} \frac{s}{a} l} \int_0^l f(y) \operatorname{sh} \frac{s}{a} (l - y)\, dy -$$

$$- \frac{1}{a} \int_0^x f(y) \operatorname{sh} \frac{s}{a} (x - y)\, dy.$$

Для отыскания решения воспользуемся третьей теоремой разложения. Полюсами функции $\overline{u(x, s)}$ служат только корни уравнения $\quad \mathrm{sh}\,\frac{s}{a}\,l=0,$

т. е.
$$s_n=\frac{n\pi i a}{l} \quad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots).$$

Все эти полюсы — простые. Находим вычеты в них:

$$\operatorname*{Res}_{s=s_n}\left\{e^{st}\,\overline{u(x, s)}\right\}=\lim_{s\to s_n}\left\{(s-s_n)\,e^{st}\,\overline{u(x, s)}\right\}=$$

$$=\frac{\mathrm{sh}\,\frac{s_n}{a}\,x}{l\,\mathrm{c}\,\frac{s_n l}{a}}\,e^{s_n t}\int\limits_0^l f(y)\,\mathrm{sh}\,\frac{s_n}{a}\,(l-y)\,dy;$$

при $\underset{(n=0)}{s_n}=0$

$$\operatorname*{Res}_{s=0}\left\{e^{st}\,\overline{u(x, s)}\right\}=0;$$

при $s_n=\frac{n\pi i a}{l}$

$$\operatorname*{Res}_{s=\frac{n\pi i a}{l}}\left\{e^{st}\,\overline{u(x, s)}\right\}=\frac{1}{l}\,e^{\frac{n\pi i a t}{l}}\times$$

$$\times\frac{\mathrm{sh}\,\frac{n\pi i x}{l}}{\mathrm{ch}\,n\pi i}\int\limits_0^l f(y)\,\mathrm{sh}\,\frac{n\pi i\,(l-y)}{l}\,dy=$$

$$=\frac{e^{\frac{n\pi i a t}{l}}}{l}\,\frac{i\sin\frac{n\pi x}{l}}{(-1)^n}\int\limits_0^l f(y)\,i\sin\frac{n\pi\,(l-y)}{l}\,dy.$$

Но

$$\sin\frac{n\pi(l-y)}{l}=\sin n\pi\cos\frac{n\pi y}{l}-\cos n\pi\sin\frac{n\pi y}{l}=$$

$$=-(-1)^n\sin\frac{n\pi y}{l},$$

поэтому

$$\operatorname*{Res}_{s=\frac{n\pi i a}{l}}\{e^{st}\,\overline{u(x, s)}\}=$$

$$=\frac{1}{l}e^{\frac{n\pi i a t}{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}\int\limits_0^l f(y)\sin\frac{n\pi y}{l}\,dy;$$

Аналогично

$$\operatorname*{Res}_{s=-\frac{n\pi i a}{l}}\{e^{st}\,\overline{u(x, s)}\}=$$

$$=\frac{1}{l}e^{-\frac{n\pi i a t}{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}\int\limits_0^l f(y)\sin\frac{n\pi y}{l}\,dy$$

(в силу того, что $\sin\left(-\frac{n\pi x}{l}\right)=-\sin\frac{n\pi x}{l}$, $\sin\left(-\frac{n\pi y}{l}\right)=-\sin\frac{n\pi y}{l}$).

Сумма этих двух вычетов, после замены $e^{\frac{n\pi i a t}{l}}+e^{-\frac{n\pi i a t}{l}}=2\cos\frac{n\pi a t}{l}$, может быть записана в виде

$$\operatorname*{Res}_{s=\frac{n\pi i a}{l}}\{e^{st}\,\overline{u(x, s)}\}+\operatorname*{Res}_{s=-\frac{n\pi i a}{l}}\{e^{st}\,\overline{x(x, s)}\}=$$

$$=b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi a t}{l},$$

где

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(y) \sin \frac{n\pi y}{l}\, dy. \qquad (7;\ 4;\ 4)$$

Суммируя же вычеты по всем полюсам, т. е. по n от $n=1$ до $n=\infty$, находим по третьей теореме разложения решение исходного уравнения в виде

$$u(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi at}{l}, \qquad (7;\ 4;\ 5)$$

где коэффициенты b_n определяются формулами (7; 4; 4), т. е. являются коэффициентами Фурье функции $f(x)$ при разложении последней на отрезке $[0, l]$ по синусам.

Нетрудно видеть, что мы получили как раз ту форму решения задачи о малых поперечных колебаниях струны, к которой обычно приходят при применении метода Фурье — решение в форме тригонометрического ряда.

2. Решим задачу о нагревании стержня, ограниченного с одного конца, при отсутствии отдачи тепла во внешнюю среду.

Направим ось Ox вдоль стержня, поместив начало координат в начале стержня. Пусть в начальный момент ($t=0$) температура вдоль стержня постоянна и равна нулю. Кроме того, в начале стержня ($x=0$) поддерживается постоянная температура $T=T_0$. Задача сводится к интегрированию одномерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad (7;\ 4;\ 6)$$

при начальном условии $T(0, x)=0$ и граничном условии $T(t, 0)=T_0$.

Перейдем к изображающему уравнению по аргументу t, полагая $T(t, x) \doteqdot \overline{T(s, x)}$.

В силу нулевого начального условия имеем

$$\frac{\partial T}{\partial t} \doteqdot s\overline{T(s, x)};$$

кроме того,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \doteqdot \frac{\overline{\partial^2 T(s, x)}}{\partial x^2}.$$

Изображающее уравнение можно записать в виде

$$\frac{\overline{\partial^2 T(s, x)}}{\partial x^2} - \frac{s}{a^2}\overline{T(s, x)} = 0. \qquad (7;\ 4;\ 7)$$

Интегрируя это обыкновенное линейное дифференциальное уравнение, аргументом которого является x, находим его общее решение

$$\overline{T(s, x)} = C_1(s)e^{\frac{\sqrt{s}x}{a}} + C_2(s)e^{-\frac{\sqrt{s}x}{a}}.$$

В силу начального условия, используя теорему о связи начального значения оригинала с конечным значением изображения, имеем:

$$\lim_{s\to\infty} s\overline{T(s, x)} = \lim_{s\to\infty} s\left[C_1(s)e^{\frac{x\sqrt{s}}{a}} + C_2(s)e^{-\frac{x\sqrt{s}}{a}}\right] = $$
$$= T(0, x) = 0.$$

Чтобы удовлетворить этому условию следует положить $C_1(s)=0$ (принимая, что $\lim\limits_{s\to\infty} sC_2(s)e^{-\frac{x\sqrt{s}}{a}}=0$). Строя для

граничного условия ($T(t, 0)=T_0$) изображение, находим $\overline{T(s, 0)}=\frac{T_0}{s}$, откуда $C_2(s)=\frac{T_0}{s}$.

Итак,

$$\overline{T(s, x)}=\frac{T_0}{s}e^{-\frac{x\sqrt{s}}{a}}.$$

По справочной таблице (стр. 275, № 64) имеем

$$\frac{1}{s}e^{-\alpha\sqrt{s}} \doteqdot 1-\Phi\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right),$$

где $\Phi(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{\tau^2}{2}}d\tau$ — интеграл вероятностей.

Отсюда находим

$$\frac{T_0}{s}e^{-\frac{x\sqrt{s}}{a}} \doteqdot T_0\left[1-\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right].$$

Итак, мы пришли к следующему решению поставленной задачи:

$$T(t, x)=T_0\left[1-\Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right]. \qquad (7;\ 4;\ 8)$$

3. На одном конце однородного стержня длины l поддерживается постоянная температура T_0, на другом происходит свободный теплообмен с окружающей средой, температура которой равна нулю. Через боковую поверхность стержня теплоотдачи нет. В начальный момент температура стержня равна нулю. Найти распределение температуры вдоль стержня для любого момента времени $t>0$ и предел, к которому стремится это распределе-

ние при $t \to \infty$ (так называемый «установившийся режим»).

Направим ось Ox вдоль стержня, поместив начало координат в тот конец стержня, на котором поддерживается постоянная температура T_0. Задача снова сводится к интегрированию одномерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad (7;\ 4;\ 6)$$

при начальном условии $T(0, x) = 0$, $0 < x \leqslant l$ и граничных условиях $T(t, 0) = T_0$ (левый конец);

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=l} + hT(t, l) = 0, \qquad (7;\ 4;\ 9)$$

где h — коэффициент внешней теплопроводности (правый конец).

Изображающее уравнение (по аргументу t) имеет тот же вид, что и в предыдущей задаче:

$$\frac{\partial^2 \overline{T(s,\ x)}}{\partial x^2} - \frac{s}{a^2}\overline{T(s,\ x)} = 0. \qquad (7;\ 4;\ 7)$$

Решение этого уравнения теперь удобнее взять в виде

$$\overline{T(s,\ x)} = C_1(s)\operatorname{ch}\frac{x\sqrt{s}}{a} + C_2(s)\operatorname{sh}\frac{x\sqrt{s}}{a}. \qquad (7;\ 4;\ 10)$$

В силу условия на левом конце имеем

$$T(t,\ 0) = T_0 \risingdotseq \overline{T(s,\ 0)},$$

поэтому

$$\overline{T(s,\ 0)} = C_1(s) = \frac{T_0}{s}.$$

Из условия на правом конце получаем

$$\left.\frac{\overline{\partial T(s, x)}}{\partial x}\right|_{x=l} + h\overline{T(s, l)} = 0. \qquad (7;\ 4;\ 11)$$

Но с учетом найденного значения C_1 имеем:

$$\overline{T(s, l)} = \frac{T_0}{s}\operatorname{ch}\frac{l\sqrt{s}}{a} + C_2(s)\operatorname{sh}\frac{l\sqrt{s}}{a},$$

$$\left.\frac{\overline{\partial T(s, x)}}{\partial x}\right|_{x=l} = \sqrt{\frac{s}{a}}\left(\frac{T_0}{s}\operatorname{sh}\frac{l\sqrt{s}}{a} + C_2(s)\operatorname{ch}\frac{l\sqrt{s}}{a}\right).$$

Внося эти значения в уравнение (7; 4; 11), находим $C_2(s)$:

$$C_2(s) = -\frac{T_0}{s}\,\frac{\dfrac{\sqrt{s}}{a}\operatorname{sh}\dfrac{l\sqrt{s}}{a} + h\operatorname{ch}\dfrac{l\sqrt{s}}{a}}{\dfrac{\sqrt{s}}{a}\operatorname{ch}\dfrac{l\sqrt{s}}{a} + h\operatorname{sh}\dfrac{l\sqrt{s}}{a}}.$$

Наконец, внося найденные значения $C_1(s)$ и $C_2(s)$ в уравнение (7; 4; 10), находим после элементарных преобразований следующее окончательное выражение для $\overline{T(s, x)}$:

$$\overline{T(s, x)} = \frac{T_0}{s}\,\frac{\sqrt{s}\operatorname{ch}\dfrac{(l-x)\sqrt{s}}{a} + ha\operatorname{sh}\dfrac{(l-x)\sqrt{s}}{a}}{\sqrt{s}\operatorname{ch}\dfrac{l\sqrt{s}}{a} + ha\operatorname{sh}\dfrac{l\sqrt{s}}{a}}. \qquad (7;\ 4;\ 12)$$

Для отыскания оригинала используем третью теорему разложения, для чего следует найти все особые точки изображения $\overline{T(s, x)}$. Особыми точками $\overline{T(s, x)}$ служат нули знаменателя. Этот знаменатель имеет про-

стой * ноль при $s=0$ и, кроме того, все корни уравнения

$$\sqrt{s}\,\mathrm{ch}\,\frac{l\sqrt{s}}{a}+ha\,\mathrm{sh}\,\frac{l\sqrt{s}}{a}=0.$$

Последнему уравнению можно придать вид

$$\mathrm{th}\,\frac{l\sqrt{s}}{a}=-\frac{1}{ha}\sqrt{s}.$$

Полагая в нем $\frac{l\sqrt{s}}{a}=iz$, преобразуем его к виду

$$\mathrm{tg}\,z=-\mu z \qquad (7;\ 4;\ 13)$$

$\left(\text{здесь обозначено } \mu=\frac{1}{hl} \text{ и учтено, что } \mathrm{th}\,iz=i\,\mathrm{tg}\,z\right)$.

Покажем, что уравнение (7; 4; 13) при $\mu>0$ имеет только вещественные корни. Положим $z=u+iv$. Учитывая, что

$$\mathrm{tg}\,(u+iv)=\frac{\mathrm{tg}\,u+\mathrm{tg}\,iv}{1-\mathrm{tg}\,u\,\mathrm{tg}\,iv}=\frac{\mathrm{tg}\,u+i\,\mathrm{th}\,v}{1-i\,\mathrm{tg}\,u\,\mathrm{th}\,v},$$

уравнение приведется к виду

$$\frac{\mathrm{tg}\,u+i\,\mathrm{th}\,v}{1-i\,\mathrm{tg}\,u\,\mathrm{tg}\,v}=-\mu\,(u+iv).$$

---

* Ноль этот простой, так как

$$\lim_{s\to 0}\frac{\sqrt{s}\,\mathrm{ch}\,\frac{(l-x)\sqrt{s}}{a}+ha\,\mathrm{sh}\,\frac{(l-x)\sqrt{s}}{a}}{\sqrt{s}\,\mathrm{ch}\,\frac{l\sqrt{s}}{a}+ha\,\mathrm{sh}\,\frac{l\sqrt{s}}{a}}=\frac{1+h\,(l-x)}{1+hl}\neq\infty.$$

Отделяя в полученном уравнении вещественную часть от мнимой, приходим к уравнениям

$$\operatorname{tg} u = -\mu (u + v \operatorname{tg} u \operatorname{th} v), \quad \operatorname{th} v = \mu (u \operatorname{tg} u \operatorname{th} v - v).$$

Исключая из этих двух уравнений $\operatorname{tg} u$, приходим к следующему уравнению:

$$u^2 = -\frac{(\mu v + \operatorname{th} v)(1 + \mu v \operatorname{th} v)}{\mu^2 \operatorname{th} v}.$$

Но при $v \neq 0$ и $\mu > 0$ правая часть всегда отрицательна: v и $\operatorname{tg} v$ всегда имеют при вещественном v один и тот же знак. Итак, уравнение (7; 4; 13) не может иметь корней с отличной от нуля мнимой частью: все его корни вещественны. Для отыскания же вещественных корней уравнения (7; 4; 13) можно применить графический метод — найти точки пересечения тангенсоиды $w = \operatorname{tg} z$ с прямой $w = -\mu z$ (рис. 34).

Пусть абсциссы точек пересечения при $z > 0$ будут $z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots$, тогда, поскольку уравнение (7; 4; 13) не изменяется при замене z на $-z$, его корнями будут $\pm z_1, \pm z_2, \ldots, \pm z_k, \ldots$; все эти корни простые. Обозначим соответствующие полюсы изображения (7; 4; 12) через s_k; очевидно $s_k = -\frac{a^2}{l^2} z_k^2$, причем полюсы s_k также простые. Кроме того, мы раньше нашли простой полюс $s_0 = 0$.

Найдем вычеты функции $e^{st}\overline{T(s, x)}$ в полюсах $s_0 = 0$, $s = s_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Вычет в полюсе $s_0 = 0$:

$$\operatorname*{Res}_{s=0} \left\{ e^{st}\overline{T(s, x)} \right\} = \lim_{s \to 0} \left\{ s e^{st}\overline{T(s, x)} \right\} = T_0 \frac{1 + h(l - x)}{1 + hl}.$$

Для определения вычета в полюсе $s=s_k$ воспользуемся (поскольку полюс простой) формулой

$$\operatorname*{Res}_{s=s_k} \frac{F(s)}{\varphi(s)} = \frac{F(s_k)}{\varphi'(s_k)}.$$

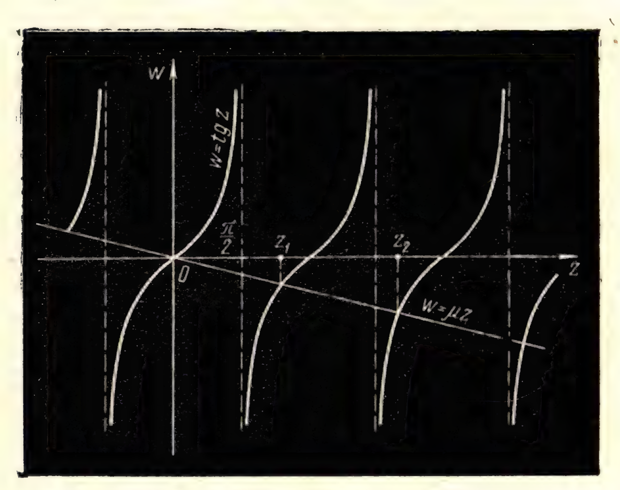


Рис. 34

В данном случае

$$F(s) = \frac{T_0}{s} e^{st} \left[\sqrt{s} \operatorname{ch} \frac{l-x}{a} \sqrt{s} + ha \operatorname{sh} \frac{l-x}{a} \sqrt{s} \right];$$

$$\varphi(s) = \sqrt{s} \operatorname{ch} \frac{l}{a} \sqrt{s} + ha \operatorname{sh} \frac{l}{a} \sqrt{s}; \quad \varphi'(s) = \frac{1}{2\sqrt{s}} \operatorname{ch} \frac{l}{a} \sqrt{s} +$$

$$+\frac{l}{2a}\operatorname{sh}\frac{l}{a}\sqrt{s}+\frac{hl}{2\sqrt{s}}\operatorname{ch}\frac{l}{a}\sqrt{s}=\frac{1+hl}{2\sqrt{s}}\operatorname{ch}\frac{l}{a}\sqrt{s}+$$

$$+\frac{l}{2a}\operatorname{sh}\frac{l}{a}\sqrt{s};$$

$$\operatorname*{Res}_{s=s_k}\left[e^{st}\overline{T(s,x)}\right]=$$

$$=\frac{T_0e^{s_kt}}{s_k}\cdot\frac{\sqrt{s_k}\operatorname{ch}\frac{l-x}{l}\sqrt{s_k}+ha\operatorname{sh}\frac{l-x}{a}\sqrt{s_k}}{\frac{1+hl}{2\sqrt{s_k}}\operatorname{ch}\frac{l}{a}\sqrt{s_k}+\frac{l}{2a}\operatorname{sh}\frac{l}{a}\sqrt{s_k}}=$$

$$=2T_0e^{s_kt}\frac{\operatorname{ch}\frac{l-x}{a}\sqrt{s_k}+\frac{ha}{\sqrt{s_k}}\cdot\operatorname{sh}\frac{l-x}{a}\sqrt{s_k}}{(1+hl)\operatorname{ch}\frac{l}{a}\sqrt{s_k}+\frac{l}{a}\sqrt{s_k}\operatorname{sh}\frac{l\sqrt{s_k}}{a}}.$$

Если здесь снова положить $\sqrt{s_k}=i\frac{a}{l}z_k$ (можно ограничиться только положительными корнями уравнения (7; 4; 13), так как отрицательные приводят к тем же значениям s_k), то после элементарных преобразований последнее выражение можно будет привести к виду

$$\operatorname*{Res}_{s=s_k}\left[e^{st}\overline{T(s,x)}\right]=2T_0e^{-\frac{a^2}{l^2}z_k^2t}\frac{\cos\frac{l-x}{l}z_k+\frac{hl}{z_k}\sin\frac{l-x}{l}z_k}{(1+hl)\cos z_k-z_k\sin z_k}.$$

Отсюда по третьей теореме разложения приходим к следующему решению поставленной задачи:

$$T(t,\ x)=T_0\,\frac{1+h(l-x)}{1+hl}+$$

$$+2T_0\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\frac{a^2}{l^2}z_k^2 t}\,\frac{\cos\frac{l-x}{l}z_k+\frac{hl}{z_k}\sin\frac{l-x}{l}z_k}{(1+hl)\cos z_k-z_k\sin z_k},$$

(7; 4; 14)

где z_k — положительные корни уравнения (7; 4; 13).

При $t\to\infty$ получаем установившийся режим:

$$\lim_{t\to\infty}T(t,\ x)=T_{\text{пред}}(x)=T_0\,\frac{1+h(l-x)}{1+hl}. \quad (7;\ 4;\ 15)$$

Легко проверить, что установившийся режим удовлетворяет обоим граничным условиям:

$$T_{\text{пред}}(0)=T_0,\quad \left.\frac{\partial T_{\text{пред}}(x)}{\partial x}\right|_{x=l}+hT_{\text{пред}}(l)=0.$$

Подчеркнем, что если бы нам требовалось найти только установившийся режим, не было бы необходимости находить оригинал по изображению (7; 4; 12), т. е. решать задачу до конца. Имея изображение решения (7; 4; 12), установившийся режим можно было бы найти по теореме о конечном значении оригинала

$$T_{\text{пред}}(x)=\lim_{t\to\infty}T(t,\ x)=\lim_{s\to 0}s\,\overline{T(s,\ x)}=T_0\,\frac{1+h(l-x)}{1+hl}.$$

§ 5. Решение интегральных уравнений

Методами операционного исчисления чрезвычайно просто решаются интегральные уравнения Вольтерра первого и второго рода в том случае, когда ядро уравнения — функция $K(t, \tau)$ зависит только от разности аргументов $t-\tau$: $K(t, \tau)=K(t-\tau)$. Соответствующие интегральные уравнения имеют, таким образом, вид

$$x(t)=f(t)+\int_0^t K(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau \qquad (7;\ 5;\ 1)$$

(уравнение Вольтерра второго рода);

$$\int_0^t K(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau=f(t) \qquad (7;\ 5;\ 2)$$

(уравнение Вольтерра первого рода).

В обоих случаях функция $x(t)$ — неизвестная, а $f(t)$ и $K(t-\tau)$ — известные функции, предполагаемые оригиналами.

Переход к изображающим уравнениям в обоих случаях не представляет труда, поскольку для отыскания изображения интеграла можно воспользоваться теоремой свертывания оригиналов. После этого из полученного алгебраического уравнения сразу находится изображение искомого решения. В самом деле, изображение уравнения (7; 5; 1) имеет вид

$$\overline{x(s)}=\overline{f(s)}+\overline{K(s)}\,\overline{x(s)},$$

откуда

$$\overline{x(s)}=\frac{\overline{f(s)}}{1-\overline{K(s)}}. \qquad (7;\ 5;\ 3)$$

Аналогично для уравнения (7; 5; 2) изображение его решения определяется формулой

$$\overline{x(s)} = \frac{\overline{f(s)}}{\overline{K(s)}}. \qquad (7;\ 5;\ 4)$$

Возможность применения операционных методов налагает условие, чтобы правая часть равенств (7; 5; 3) и (7; 5; 4) могла служить изображением некоторого оригинала, т. е. удовлетворяла условиям, перечисленным в первой главе.

Примеры. 1. Решить уравнение

$$\int_0^t (t-\tau)^2 x(\tau)\, d\tau = \operatorname{sh} t - \sin t.$$

Имеем:

$$\frac{t^2}{2!} \doteqdot \frac{1}{s^3}, \quad \operatorname{sh} t \doteqdot \frac{1}{s^2-1}, \quad \sin t \doteqdot \frac{1}{s^2+1},$$

поэтому изображающее уравнение будет

$$\frac{2}{s^3}\overline{x(s)} = \frac{1}{s^2-1} - \frac{1}{s^2+1} = \frac{2}{s^4-1},$$

откуда

$$\overline{x(s)} = \frac{s^3}{s^4-1} = \frac{1}{2}\left[\frac{s}{s^2-1} + \frac{s}{s^2+1}\right].$$

Таким образом, решением исходного уравнения служит функция

$$x(t) = \frac{1}{2}[\operatorname{ch} t + \cos t].$$

2. Решить уравнение

$$x(t)=\sin t+\int_0^t e^{t-\tau}x(\tau)\,d\tau.$$

Переходим к изображающему уравнению

$$\overline{x(s)}=\frac{1}{s^2+1}+\frac{\overline{x(s)}}{s-1},$$

откуда

$$\overline{x(s)}=\frac{s-1}{(s-2)(s^2+1)}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{s-2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{s}{s^2+1}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{s^2+1}.$$

Таким образом, искомое решение есть

$$x(t)=\frac{1}{5}e^{2t}-\frac{1}{5}\cos t+\frac{3}{5}\sin t.$$

Упражнения

1. Вычислить следующие несобственные интегралы методом, описанным в §1, I (формула (7; 1; 3)):

а) $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}\sin\beta x\,dx}{x}$ $(\alpha>0)$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\beta/\alpha$;

б) $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}\cos\gamma x}{x}\,dx$ $(\alpha>0, \beta>0)$.

Ответ: $\ln\frac{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}{\alpha}$;

в) $\int\limits_0^\infty xe^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx\ (\alpha>0)$.

Ответ: $\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2}$.

2. Вычислить следующие несобственные интегралы методом, описанным в § 1, II (формула (7; 1; 8)):

а) $\int\limits_0^\infty \cos(tu^2)\,du$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2t}}$;

б) $\int\limits_0^\infty \dfrac{u\sin tu\,du}{\alpha^2+u^2}$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}e^{-\alpha t}$;

в) $\int\limits_0^\infty e^{-tu^2}\,du$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{2\sqrt{t}}$.

3. Следующие несобственные интегралы вычислить при помощи теоремы Парсеваля (§ 1, III):

а) $\int\limits_0^\infty \dfrac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{\sqrt{x}}\,dx \quad (\alpha>0,\ \beta>0)$.

Ответ: $\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha\beta}}\{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}\}$;

б) $\int\limits_0^\infty \frac{\sin\alpha x - \sin\beta x}{x\sqrt{x}}\,dx \quad (\alpha>0,\ \beta>0)$

Ответ: $\sqrt{2\pi}\,\{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\}$;

в) $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}\,dx \quad (\alpha>0,\ \beta>0)$.

Указание. Предварительно применить подстановку $x^2=t$.

Ответ: $\sqrt{\pi}\,\{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}\}$.

4. Проинтегрировать следующие дифференциальные уравнения Эйлера при произвольных начальных условиях:

а) $(1-2t)\,x''+2x'+(2t-3)\,x=0$,

Ответ: $x=C_1e^t+C_2\,te^{-t}$;

б) $tx''-(2t+1)\,x'+(t+1)\,x=0$.

Ответ: $x=C_1t^2e^t+C_2e^t$.

5. Проинтегрировать следующие дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом:

а) $x''(t)-x'(t)+\lambda u(t-\tau)\{x'(t-\tau)-x(t-\tau)\}=0$

(начальные условия — произвольные при $t=0$)

Указание. Использовать теорему свертывания для отыскания оригинала $\frac{1}{s^{n+1}(s-1)}$.

Ответ: $x(t)=x_0e^t+\left(x_0'-x_0\right)\times$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^n u(t-n\tau)\,e^{t-n\tau}}{n!}\times\int\limits_0^{t-n\tau}e^{-t_1}t_1^n\,dt_1;$$

б) $x''(t) + x'(t) - 2e^{\tau} x(t-\tau) = 0$,

если при $0 \leqslant t \leqslant \tau$, $x(t) \equiv e^t$ (начальная функция).

Ответ: $x(t) = e^t$.

6. Проинтегрировать уравнение малых поперечных колебаний струны конечной длины $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$:

а) при граничных условиях $u(0, t) = u(l, t) \equiv 0$ и начальных условиях $u(x; 0) \equiv 0$, $\left.\dfrac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x)$.

$$\textit{Ответ: } u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \sin\frac{n\pi a t}{l},$$

$$\text{где } b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l g(y) \sin\frac{n\pi y}{l} dy;$$

б) при тех же граничных условиях и начальных условиях $u(x, 0) = h\sin\dfrac{\pi x}{l}$; $\left.\dfrac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$.

$$\textit{Ответ: } u(x, t) = h\sin\frac{\pi x}{l} \cos\frac{\pi a t}{l};$$

в) при тех же граничных условиях и начальных условиях

$$u(x, 0) = \begin{cases} \dfrac{2h}{l} x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{l}{2}, \\ \dfrac{2h}{l}(l - x) & \text{при } \dfrac{l}{2} \leqslant x \leqslant l, \end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

(середина струны в начальный момент оттянута на расстояние h и отпущена без начальной скорости).

Ответ:

$$u(x, t) = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{l} \cos \frac{(2n-1)\pi at}{l}.$$

7. а) Вязкая покоящаяся жидкость заполняет все пространство между двумя горизонтальными плоскостями, находящимися на расстоянии h друг от друга. Одна из плоскостей в момент $t=0$ начинает двигаться с постоянной скоростью u_0, направленной параллельно второй неподвижной плоскости. Пренебрегая действием силы тяжести и считая давление всюду постоянным, найти закон движения жидкости между плоскостями.

Указание. Если неподвижную плоскость принять за плоскость xOy, ось Ox направить по направлению вектора скорости u_0, ось Oz направить в сторону движущейся плоскости, то движение жидкости будет происходить по направлению Ox. Если скорость движения обозначить через u, то u будет функцией только от t и z, удовлетворяющей уравнению в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

где k — коэффициент, зависящий от свойств жидкости (от ее вязкости).

Начальное условие: $u(0, z) = 0$, $0 \leqslant z < h$.

Граничные условия: $u(t, 0) = 0$, $u(t, h) = u_0 (t > 0)$. (К этому же уравнению при тех же начальных и граничных условиях сводится задача о распространении тепла в стержне длины h при заданных температурах на его концах, если боковая поверхность стержня изолирована.)

Ответ: $u(t, z) = u_0 \dfrac{z}{h} + \dfrac{2u_0}{h} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi z}{h} e^{-\frac{h^2\pi^2}{h^2} kt}$.

б) Найти решение той же задачи при условии, что одна из плоскостей движется со скоростью, являющейся заданной функцией времени $t(u_t = v(t))$, и движение начинается в момент $t=0$.

Указание. Использовать решение предыдущей задачи и интеграл Дюамеля (см. гл. 5, § 3).

Ответ: $$u(t, z) = \frac{v(0)\,u(t, z)}{u_0} + \frac{1}{u_0}\int_0^t v'(\tau)\,u(t-\tau, z)\,d\tau,$$

где $u(t, z)$ — решение предыдущей задачи.

8. Решить следующие интегральные уравнения Вольтерра первого и второго рода:

а) $$\int_0^t \operatorname{ch}(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau = \operatorname{ch} t - \cos t.$$

Ответ: $x(t) = 2\sin t$;

б) $$\int_0^t \cos(t-\tau)\,x(t)\,d\tau = t\cos t.$$

Ответ: $x(t) = 2\cos t - 1$;

в) $$x(t) = e^t + \int_0^t e^{t-\tau}x(\tau)\,d\tau.$$

Ответ: $x(t) = e^{2t}$;

г) $$x(t) = 1 - \cos t + \int_0^t \sin(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau.$$

Ответ: $x(t) = \dfrac{t^2}{2}$.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЭФРОСА И НЕКОТОРЫЕ ДРУГИЕ ФОРМУЛЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

В этой главе будет выведено преобразование Эфроса, а также несколько вспомогательных формул, позволяющих находить изображения функций, зависящих от аргументов $\sqrt{t}$, t^2, $\frac{1}{t}$, если известны изображения функций основного аргумента t, а также оригиналы функций от аргументов $\sqrt{s}$, $\frac{1}{s}$, $s+\frac{1}{s}$, $\ln s$, когда известен оригинал для функции основного аргумента s.

§ 1. Преобразование Эфроса

Пусть даны операционные соотношения

$$f(t) \doteqdot \overline{f(s)} \text{ и } F(t, \alpha) \doteqdot \overline{\varphi(s)}\, e^{-\alpha q(s)}, \qquad (8;\ 1;\ 1)$$

причем $|f(t)| < Me^{\sigma_0 t}$ и при $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$ справедливо неравенство $\mathrm{Re}[q(s)] > \sigma_0$. Кроме того, предположим, что интеграл Лапласа, определяющий изображение функции $F(t, \alpha)$, сходится равномерно относительно α при $\alpha \geqslant 0$. При выполнении этих условий справедливо операционное соотношение, называемое *преобразованием Эфроса,*

$$\int_0^\infty f(\alpha)\, F(t, \alpha)\, d\alpha \doteqdot \overline{\varphi(s)}\, \overline{f[q(s)]}. \qquad (8;\ 1;\ 2)$$

Докажем это. Имеем равенство

$$\overline{f(s)}=\int_0^\infty e^{-s\alpha}f(\alpha)\,d\alpha, \ \operatorname{Re}(s)>\sigma_0.$$

Заменяя здесь s на $q(s)$, находим

$$\overline{f[q(s)]}=\int_0^\infty e^{-\alpha q(s)}f(\alpha)\,d\alpha \begin{cases}\operatorname{Re}(s)>\sigma_0,\\ \operatorname{Re}[q(s)]>\sigma_0.\end{cases}$$

С другой стороны, имеем равенство

$$\overline{\varphi(s)}e^{-\alpha q(s)}=\int_0^\infty e^{-st}F(t, \alpha)\,dt.$$

Умножая левую и правую часть этого равенства на $f(\alpha)d\alpha$ и интегрируя по α от 0 до ∞, что возможно, находим

$$\overline{\varphi(s)}\int_0^\infty e^{-\alpha q(s)}f(\alpha)\,d\alpha=\int_0^\infty f(\alpha)\,d\alpha\int_0^\infty e^{-st}F(t, \alpha)\,dt.$$

Но левая часть равна $\overline{\varphi(s)}\,\overline{f[q(s)]}$, а в правой порядок интегрирования можно изменить в силу равномерной сходимости по α интеграла $\int_0^\infty e^{-st}F(t, \alpha)\,dt$, поэтому приходим к равенству

$$\overline{\varphi(s)}\,\overline{f[q(s)]}=\int_0^\infty e^{-st}dt\int_0^\infty f(\alpha)F(t, \alpha)\,d\alpha.$$

А это равенство равносильно операционному соотношению (8; 1; 2).

Пример. В § 1 гл. 4 мы нашли операционное соотношение $J_0\{2\sqrt{t}\} \doteqdot \frac{1}{s} e^{-\frac{1}{s}}$, где $J_0(t)$ — функция Бесселя первого рода с нулевым индексом. Применяя к этому соотношению теорему подобия (гл. 2, § 5 (2, 5, 1)), находим

$$J_0(2\sqrt{\alpha t}) \doteqdot \frac{1}{\alpha}\frac{\alpha}{s} e^{-\frac{\alpha}{s}} = \frac{1}{s} e^{-\frac{\alpha}{s}}.$$

Пусть теперь $f(t)$ произвольный оригинал, для которого выполнено условие $|f(t)| < Me^{\sigma_0 t}$, где $\sigma_0 \leqslant 0$. Принимая за $F(t, \alpha)$ функцию $J_0(2\sqrt{\alpha t})$, имеем $\overline{\varphi(s)} = \frac{1}{s}$, $q(s) = \frac{1}{s}$; при $\operatorname{Re}(s) > 0 \geqslant \sigma_0$ имеем $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{s}\right) > 0 \geqslant \sigma_0$.

Поэтому преобразование Эфроса применимо.

Итак, из соотношения $f(t) \doteqdot \overline{f(s)}$ $(\sigma_0 \leqslant 0)$ вытекает соотношение

$$\int_0^\infty f(\alpha) J_0(2\sqrt{\alpha t})d\alpha \doteqdot \frac{1}{s} \overline{f\left(\frac{1}{s}\right)}. \qquad (8;\ 1;\ 3)$$

Применим формулу (8; 1; 3) к функциям $e^{-\beta t}$ $(\beta > 0)$, $\sin \beta t$, $\cos \beta t$.

1. $e^{-\beta t} \doteqdot \frac{1}{s+\beta}$; $\int_0^\infty e^{-\alpha\beta} J_0(2\sqrt{\alpha t})\,d\alpha \doteqdot \frac{1}{1+\beta s} = \frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{s+\frac{1}{\beta}}$.

Отсюда следует, что

$$\int_0^\infty e^{-\alpha\beta} J_0(2\sqrt{\alpha t})\,d\alpha = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{t}{\beta}}.$$

$$2.\ \sin\beta t \doteqdot \frac{\beta}{s^2+\beta^2};\ \int_0^\infty \sin\alpha\beta\, J_0(2\sqrt{\alpha t})\, dt \doteqdot$$

$$\doteqdot \frac{1}{s}\frac{\beta}{\frac{1}{s^2}+\beta^2} = \frac{\beta s}{1+\beta^2 s^2} = \frac{1}{\beta}\cdot\frac{s}{s^2+\frac{1}{\beta^2}}.$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^\infty \sin\alpha\beta J_0(2\sqrt{\alpha t})\, d\alpha = \frac{1}{\beta}\cos\frac{t}{\beta}.$$

$$3.\ \cos\beta t \doteqdot \frac{s}{s^2+\beta^2};\ \int_0^\infty \cos\alpha\beta J_0(2\sqrt{\alpha t})\, d\alpha \doteqdot$$

$$\doteqdot \frac{1}{s}\cdot\frac{\frac{1}{s}}{\frac{1}{s^2}+\beta^2} = \frac{1}{\beta^2}\cdot\frac{1}{s^2+\frac{1}{\beta^2}} = \frac{1}{\beta}\cdot\frac{\frac{1}{\beta}}{s^2+\frac{1}{\beta^2}}.$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^\infty \cos\alpha\beta J_0(2\sqrt{\alpha t})\, d\alpha = \frac{1}{\beta}\sin\frac{t}{\beta}.$$

§ 2. Изображения функций от аргументов t^2, $\sqrt{t}$ и $\frac{1}{t}$

Для дальнейшего нам понадобится изображение функции $f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}}$. Найдем его.

Имеем

$$\overline{f(s)}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-st}e^{-\frac{a^2}{4t}}\frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

Для вычисления этого интеграла положим $t=u^2$:

$$\overline{f(s)}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\left(su^2+\frac{a^2}{4u^2}\right)}du.$$

вычисление этого интеграла опускаем, значение его находим по справочнику *

$$\int_0^\infty e^{-px^2-\frac{q}{x^2}}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}e^{-2\sqrt{pq}},\ \{\operatorname{Re}p>0,\ \operatorname{Re}q\geqslant 0\}.$$

Полагая в этой формуле $p=s$, $q=\frac{a^2}{4}$, находим

$$\overline{f(s)}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\left(su^2+\frac{a^2}{4u^2}\right)}du=\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-a\sqrt{s}},$$

$$\left(-\frac{\pi}{4}\leqslant\arg a\leqslant\frac{\pi}{4}\right).$$

Итак, приходим к операционному соотношению

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{a^2}{4t}}\doteqdot\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-a\sqrt{s}},\ \left(-\frac{\pi}{4}\leqslant\arg a\leqslant\frac{\pi}{4}\right).\quad(8;\ 2;\ 1)$$

---

* См., например: И. М. Рыжик и И. С. Градштейн. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. ГТТИ, 1951.

Изображения функций от аргумента t^2.

Предполагая известным изображение $f(t) \doteqdot \overline{f(s)}$, найдем изображение $f(t^2)$.

Имеем

$$f(t^2) \doteqdot \int_0^\infty e^{-st} f(t^2)\, dt.$$

Сделаем под знаком интеграла замену $t^2 = \tau$:

$$f(t^2) \doteqdot \int_0^\infty e^{-s\sqrt{\tau}} f(\tau) \frac{d\tau}{2\sqrt{\tau}}. \qquad (8;\ 2;\ 2)$$

Но из формулы (8; 2; 1) вытекает равенство

$$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-a\sqrt{s}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-su - \frac{a^2}{4u}} \frac{du}{\sqrt{u}}.$$

Заменяя в этом равенстве s на τ и a на s, находим

$$\frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-s\sqrt{\tau}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\tau u - \frac{s^2}{4u}} \frac{du}{\sqrt{u}}.$$

Делая соответствующую замену в равенстве (8; 2; 2), находим

$$f(t^2) \doteqdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty f(\tau)\, d\tau \int_0^\infty e^{-\tau u - \frac{s^2}{4u}} \frac{du}{\sqrt{u}}.$$

Изменим в правой части порядок интегрирования (это возможно, если функция $f(t^2)$ — оригинал, поскольку в этом случае сходится интеграл в правой части равенства (8; 2; 2), кроме того, внутренний интеграл в правой

части последнего равенства сходится равномерно относительно параметра τ при $\tau>0$):

$$f(t^2) \doteqdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4u}} \frac{du}{\sqrt{u}} \int_0^\infty e^{-u\tau} f(\tau)\, d\tau.$$

Но $\int_0^\infty e^{-u\tau} f(\tau)\, d\tau = \overline{f(u)}$, поэтому находим окончательно

$$f(t^2) \doteqdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4u}} \frac{\overline{f(u)}\, du}{\sqrt{u}}, \qquad (8;\ 2;\ 3)$$

где $\overline{f(u)} \doteqdot f(t)$.

Делая в формуле (8; 2; 3) замену $u=v^2$, придаем ей более симметричный вид:

$$f(t^2) \doteqdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4v^2}} \overline{f(v^2)}\, dv. \qquad (8;\ 2;\ 3^*)$$

Формулы (8; 2; 3) и (8; 2; 3*) верны, если функция $f(t^2)$ является оригиналом одновременно с $f(t)$.

Изображения функций от аргумента $\frac{1}{t}$

Зная изображение функции $f(t) \doteqdot \overline{f(s)}$, найдем изображение функции $\frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right)$ (предполагая ее оригиналом, хотя бы обобщенным).

Имеем

$$\frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right) \doteqdot \int_0^\infty e^{-st}\, \frac{1}{t}\, f\left(\frac{1}{t}\right) dt.$$

Сделаем под знаком интеграла замену переменной, полагая

$$\frac{1}{t}=\tau, \quad dt=-\frac{d\tau}{\tau^2}:$$

$$\frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right) \doteqdot \int_{\infty}^{0} e^{-\frac{s}{\tau}} \tau f(\tau)\left(-\frac{d\tau}{\tau^2}\right)=\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{s}{\tau}} \frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau}. \quad (8;\ 2;\ 4)$$

Но мы имели ранее операционное соотношение

$$J_0(2\sqrt{\alpha t}) \doteqdot \frac{1}{s} e^{-\frac{\alpha}{s}},$$

в силу чего

$$\frac{1}{s} e^{-\frac{\alpha}{s}}=\int_{0}^{\infty} e^{-su} J_0(2\sqrt{\alpha u})\,du.$$

Полагая в последнем равенстве $s=\tau$, $\alpha=s$, находим

$$\frac{1}{\tau} e^{-\frac{s}{\tau}}=\int_{0}^{\infty} e^{-\tau u} J_0(2\sqrt{su})\,du.$$

Делая соответствующую замену под знаком интеграла в правой части равенства (8; 2; 4), получаем

$$\frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right) \doteqdot \int_{0}^{\infty} f(\tau)\,d\tau \int_{0}^{\infty} e^{-\tau u} J_0(2\sqrt{su})\,du=$$

$$=\int_{0}^{\infty} J_0(2\sqrt{su})\,du \cdot \int_{0}^{\infty} e^{-\tau u} f(\tau)\,d\tau.$$

(Мы изменили в правой части порядок интегрирования, что возможно, так как функция $\frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right)$ является оригиналом, а интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-\tau u} J_0 2\sqrt{su}\, du$ сходится равномерно для всех значений s, удовлетворяющих условию $\operatorname{Re}(s) \geqslant 0$.) Но, поскольку имеем равенство

$$\int\limits_0^\infty e^{-\tau u} f(\tau)\, d\tau = \overline{f(u)},$$

находим окончательно

$$\frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right) \doteqdot \int\limits_0^\infty \overline{f(u)}\, J_0(2\sqrt{su})\, du. \qquad (8;\ 2;\ 5)$$

Обращаем внимание читателя на полную взаимность формулы (8; 2; 5) с выведенной ранее формулой (8; 1; 3):

$$\frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right) \doteqdot \int\limits_0^\infty \overline{f(u)}\, J_0(2\sqrt{su})\, du; \qquad (8;\ 2;\ 5)$$

$$\frac{1}{s} \overline{f\left(\frac{1}{s}\right)} \doteqdot \int\limits_0^\infty f(\alpha)\, J_0(2\sqrt{\alpha t})\, d\alpha. \qquad (8;\ 1;\ 3)$$

Первая из них (определяющая изображение функции $\frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right)$ по известному изображению функции $f(t) \doteqdot \overline{f(s)}$) справедлива, если $\frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right)$ является оригиналом

одновременно с $f(t)$. Вторая (определяющая оригинал функций $\frac{1}{s}\overline{f\left(\frac{1}{s}\right)}$ по известному оригиналу функции $\overline{f(s)} \doteqdot f(t)$) имеем место, если для функции $f(t)$ выполнено условие $|f(t)| < Me^{\sigma_0 t}$, где $\sigma_0 \leqslant 0$.

Изображения функций от аргумента $\sqrt{t}$

Зная изображение функции $f(t) \doteqdot \overline{f(s)}$, найдем изображение функции $f(\sqrt{t})$.

Имеем

$$f(\sqrt{t}) \doteqdot \int_0^\infty e^{-st} f(\sqrt{t})\, dt.$$

Делаем под знаком интеграла замену переменной, полагая $t=\tau^2$:

$$f(\sqrt{t}) \doteqdot 2\int_0^\infty e^{-s\tau^2} f(\tau)\, \tau d\tau. \qquad (8;\ 2;\ 6)$$

Снова используем операционное соотношение

$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{a^2}{4t}} \doteqdot \frac{1}{\sqrt{s}}\, e^{-a\sqrt{s}}$. Применяя к нему формулу обращения, имеем равенство

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{a^2}{4t}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{ut - a\sqrt{u}}\, \frac{du}{\sqrt{u}}$$

(для удобства мы обозначили в правой части переменную интегрирования через u вместо s). Делая в преды-

дущей формуле замену $a=\tau$, $\frac{1}{4t}=s$, приходим к равенству

$$2\sqrt{\frac{s}{\pi}}\, e^{-s\tau^2}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\frac{u}{4s}-\tau\sqrt{u}}\,\frac{du}{\sqrt{u}}.$$

Выражая отсюда $e^{-s\tau^2}$ через интеграл и внося это значение в правую часть равенства (8; 2; 6), находим

$$f(\sqrt{t}) \risingdotseq \sqrt{\frac{\pi}{s}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty f(\tau)\,\tau\, d\tau \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\frac{u}{4s}-\tau\sqrt{u}}\,\frac{du}{\sqrt{u}}.$$

Здесь также возможно изменение порядка интегрирования в правой части, поэтому отсюда получаем равенство

$$f(\sqrt{t}) \risingdotseq \sqrt{\frac{\pi}{s}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\frac{u}{4s}}\frac{du}{\sqrt{u}}\int_0^\infty e^{-\tau\sqrt{u}}\,\tau f(\tau)\, d\tau.$$

Но $\int_0^\infty e^{-\tau s}\tau f(\tau)\, d\tau=-\overline{f'(s)}$ (по теореме дифференцирования изображения, см. гл. 2, (2; 2; 4)), поэтому

$$\int_0^\infty e^{-\tau\sqrt{u}}\,\tau f(\tau)\, d\tau=-\overline{f'(\sqrt{u})}.$$

Таким образом,

$$f(\sqrt{t}) \risingdotseq \sqrt{\frac{\pi}{s}}\cdot\frac{(-1)}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\frac{u}{4s}}\,\frac{\overline{f'(\sqrt{u})}}{\sqrt{u}}\, du. \quad (8;\ 2;\ 7)$$

В том случае, когда $\frac{\overline{f'(\sqrt{u})}}{\sqrt{u}}$ — однозначная функция комплексного аргумента u и когда при $u \to \infty$ эта функция стремится на всей плоскости к нулю равномерно, к вычислению интеграла в правой части формулы (8; 2; 7) можно применить теорему вычетов:

$$f(\sqrt{t}) \doteqdot -\sqrt{\frac{\pi}{s}} \sum \operatorname{Res} \left\{ e^{\frac{u}{4s}} \frac{\overline{f'(\sqrt{u})}}{\sqrt{u}} \right\}, \qquad (8;\ 2;\ 7^*)$$

где суммирование распространено на особые точки функции $\frac{\overline{f'(\sqrt{u})}}{\sqrt{u}}$, множество которых предполагается конечным.

Примеры. Найдем изображения функций $\sin\sqrt{t}$ и $\operatorname{sh}\sqrt{t}$, используя формулу (8; 2; 7*).

1. Имеем

$$\sin t \doteqdot \frac{1}{s^2+1};$$

в **данном случае** $\overline{f(s)} = \frac{1}{s^2+1}$,

$$\overline{f'(s)} = -\frac{2s}{(s^2+1)^2}, \quad \frac{\overline{f'(\sqrt{u})}}{\sqrt{u}} = -\frac{2\sqrt{u}}{(u+1)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{u}} = -\frac{2}{(u+1)^2}.$$

Итак,

$$\sin\sqrt{t} \doteqdot +2\sqrt{\frac{\pi}{s}} \operatorname*{Res}_{u=-1} \left\{ e^{\frac{u}{4s}} \cdot \frac{1}{(u+1)^2} \right\}$$

(так как функция $\frac{\overline{f'(\sqrt{u})}}{\sqrt{u}}$ имеет единственный двойной

полюс $u=-1$). Но

$$\operatorname*{Res}_{u=-1}\left\{\frac{e^{\frac{u}{4s}}}{(u+1)^2}\right\}=\frac{1}{1!}\lim_{u\to-1}\frac{d}{du}\left[(u+1)^2\cdot\frac{e^{\frac{u}{4s}}}{(u+1)^2}\right]=\frac{1}{4s}e^{-\frac{1}{4s}};$$

Таким образом, $\sin\sqrt{t}\doteqdot\frac{\sqrt{\pi}}{2s\sqrt{s}}e^{-\frac{1}{4s}}$.

2. Аналогично, используя формулу $\operatorname{sh}t\doteqdot\frac{1}{s^2-1}$, найдем

$$\operatorname{sh}\sqrt{t}\doteqdot\frac{\sqrt{\pi}}{2s\sqrt{s}}e^{\frac{1}{4s}}.$$

Применяя к обеим найденным формулам теорему подобия (в виде $f(\alpha^2 t)\doteqdot\frac{1}{\alpha^2}f\left(\frac{s}{\alpha^2}\right)$), находим:

$$\sin\alpha\sqrt{t}\doteqdot\frac{\alpha}{2s}\sqrt{\frac{\pi}{s}}e^{-\frac{\alpha^2}{4s}},\qquad(8;\ 2;\ 8)$$

$$\operatorname{sh}\alpha\sqrt{t}\doteqdot\frac{\alpha}{2s}\sqrt{\frac{\pi}{s}}e^{\frac{\alpha^2}{4s}}.\qquad(8;\ 2;\ 9)$$

Применяя теорему дифференцирования оригинала и отбрасывая появляющийся при этом общий множитель $\frac{\alpha}{2}$ в левой и правой частях операционных соотношений, находим еще две формулы:

$$\frac{\cos\alpha\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\doteqdot\sqrt{\frac{\pi}{s}}e^{-\frac{\alpha^2}{4s}},\qquad(8;\ 2;\ 10)$$

$$\frac{\operatorname{ch}\alpha\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\doteqdot\sqrt{\frac{\pi}{s}}e^{\frac{\alpha^2}{4s}}.\qquad(8;\ 2;\ 11)$$

§ 3. Отыскание оригиналов функций от аргументов $\frac{1}{s}$, $\sqrt{s}$, $s+\frac{1}{s}$, $\ln s$

Оригинал для функции $\overline{f\left(\frac{1}{s}\right)}$

В § 2 этой главы мы, используя преобразование Эфроса, получили формулу (8; 1; 3)

$$\int_0^\infty f(\alpha) J_0(2\sqrt{\alpha t})\, d\alpha \doteqdot \frac{1}{s}\overline{f\left(\frac{1}{s}\right)}, \qquad (8;\ 3;\ 1)$$

где $f(\alpha) \doteqdot \overline{f(s)}$.

Эта формула решает вопрос об отыскании оригинала функции от аргумента $\frac{1}{s}$, когда известен оригинал функции от s.

Оригинал для функции $\frac{\overline{f(\sqrt{s})}}{\sqrt{s}}$

В § 2 этой главы мы установили операционное соотношение

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} \doteqdot \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\alpha\sqrt{s}}, \quad -\frac{\pi}{4} \leqslant \arg\alpha \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

Используем теперь преобразование Эфроса, полагая в нем

$F(t,\ \alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}$; но тогда $\overline{\varphi(s)} = \frac{1}{\sqrt{s}}$ и $q(s) = \sqrt{s}$.

По формуле (8; 1; 2) находим

$$\int_0^\infty f(\alpha) \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}\, d\alpha \doteqdot \frac{1}{\sqrt{s}} \overline{f(\sqrt{s})}.$$

Итак, приходим к операционному соотношению

$$\frac{1}{\sqrt{s}}\overline{f(\sqrt{s})} \doteqdot \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty f(\alpha)\, e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}\, d\alpha. \qquad (8;\ 3;\ 2)$$

Сделаем в интеграле замену переменной, полагая $\alpha = 2\beta\sqrt{t}$; предыдущее соотношение примет вид

$$\frac{1}{\sqrt{s}}\overline{f(\sqrt{s})} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\beta^2} f(2\beta\sqrt{t})\, d\beta. \qquad (8;\ 3;\ 2^*)$$

Полагая в этой последней формуле $f(t) = e^{-t}$, а следовательно, $\overline{f(s)} = \frac{1}{s+1}$, находим

$$\frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+1)} \doteqdot \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\beta^2 - 2\beta\sqrt{t}}\, d\beta = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, e^t \int_0^\infty e^{-(\beta+\sqrt{t})^2}\, d\beta.$$

Положим в последнем интеграле $\beta + \sqrt{t} = \frac{v}{\sqrt{2}}$; предыдущее соотношение преобразуется в следующее:

$$\frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+1)} \doteqdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^t \int_{\sqrt{2t}}^\infty e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv = e^t\left\{1 - \Phi(\sqrt{2t})\right\},$$

где $\Phi(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv$ — интеграл вероятностей.

Итак,

$$\frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+1)} \doteqdot e^t\left\{1 - \Phi(\sqrt{2t})\right\} \qquad (8;\ 3;\ 3)$$

Рекомендуем читателю в порядке упражнения, используя теорему смещения, вывести отсюда формулу

$$\Phi(\sqrt{2t}) \doteqdot \frac{1}{s(\sqrt{s}+1)}. \qquad (8;\ 3;\ 4)$$

В качестве второго примера использования этих формул положим в формуле (8; 3; 2) $\overline{f(s)} = \frac{1}{s} e^{-\beta s}$; **оригиналом для** $\overline{f(s)}$ **служит единичная запаздывающая функция** $u(t-\beta)$**. Тогда**

$$\frac{1}{\sqrt{s}} f(\sqrt{s}) = \frac{1}{\sqrt{s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\beta\sqrt{s}} = \frac{1}{s} e^{-\beta\sqrt{s}}.$$

Находим по формуле (8; 3; 2)

$$\frac{1}{s} e^{-\beta\sqrt{s}} \doteqdot \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty u(\alpha-\beta) e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} d\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_\beta^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} d\alpha$$

(так как $u(\alpha-\beta)=0$ при $\alpha<\beta$).

Под знаком последнего интеграла сделаем замену переменной, полагая

$\frac{\alpha}{\sqrt{2t}} = v$; будем иметь $d\alpha = \sqrt{2t}\, dv$; при $\alpha=\beta$ $v = \frac{\beta}{\sqrt{2t}}$.

Предыдущая формула преобразуется в следующую:

$$\frac{1}{s} e^{-\beta\sqrt{s}} \doteqdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\beta/\sqrt{2t}}^\infty e^{-\frac{v^2}{2}} dv = 1 - \Phi\left\{\frac{\beta}{\sqrt{2t}}\right\},$$

где $\Phi(t)$, как и ранее, — интеграл вероятностей.

Итак, приходим к операционному соотношению

$$\frac{1}{s} e^{-\beta \sqrt{s}} \risingdotseq 1 - \Phi \left\{ \frac{\beta}{\sqrt{2t}} \right\}. \qquad (8;\ 3;\ 5)$$

Это соотношение было нами использовано в гл. 7 при интегрировании уравнения охлаждения полуограниченного стержня.

Оригинал для функции $\frac{1}{s} \overline{f\left(s + \frac{1}{s}\right)}$.

В интеграле Лапласа $\overline{f(\sigma)} = \int_0^\infty e^{-\sigma\alpha} f(\alpha)\, d\alpha$ заменим σ на $s + \frac{1}{s}$:

$$\overline{f\left(s + \frac{1}{s}\right)} = \int_0^\infty e^{-\left(s + \frac{1}{s}\right)\alpha} f(\alpha)\, d\alpha. \qquad (8;\ 3;\ 6)$$

Но ранее (см. (4; 1; 11)) мы нашли операционное соотношение $J_0(2\sqrt{\alpha t}) \risingdotseq \frac{1}{s} e^{-\frac{\alpha}{s}}$. Запишем это соотношение, используя интеграл Лапласа,

$$\frac{1}{s} e^{-\frac{\alpha}{s}} = \int_0^\infty e^{-s\tau} J_0(2\sqrt{\alpha\tau})\, d\tau.$$

Умножая равенство (8; 3; 6) на $\frac{1}{s}$ и делая в правой части соответствующую замену, находим

$$\frac{1}{s} \overline{f\left(s + \frac{1}{s}\right)} = \int_0^\infty e^{-s\alpha} f(\alpha)\, d\alpha \int_0^\infty e^{-s\tau} J_0(2\sqrt{\alpha\tau})\, d\tau.$$

Положим во внутреннем интеграле $\tau = t - \alpha$; предыдущее равенство примет следующий вид:

$$\frac{1}{s}\overline{f\left(s+\frac{1}{s}\right)} = \int_0^\infty e^{-s\alpha} f(\alpha)\,d\alpha \int_\alpha^\infty e^{-s(t-\alpha)} J_0\left(2\sqrt{\alpha(t-\alpha)}\right) dt =$$

$$= \int_0^\infty f(\alpha)\,d\alpha \int_\alpha^\infty e^{-st} J_0\left(2\sqrt{\alpha(t-\alpha)}\right) dt.$$

В силу равномерной сходимости внутреннего интеграла по параметру α в правой части можно изменить порядок интегрирования. При этом новые пределы интегрирования по аргументу α станут 0 и t (см. гл. 3, доказательство теоремы свертывания оригиналов); таким образом, мы придем к следующему равенству:

$$\frac{1}{s}\overline{f\left(s+\frac{1}{s}\right)} = \int_0^\infty e^{-st} dt \int_0^t f(\alpha) J_0\left(2\sqrt{(\alpha(t-\alpha)}\right) d\alpha.$$

Это равенство равносильно операционному соотношению

$$\frac{1}{s}\overline{f\left(s+\frac{1}{s}\right)} \doteqdot \int_0^t f(\alpha) J_0\left(2\sqrt{\alpha(t-\alpha)}\right) d\alpha. \quad (8;\ 3;\ 6)$$

Полагая в этом операционном соотношении $f(t) = u(t)$, где $u(t)$ — единичная функция, имеем в силу того, что $u(t) \doteqdot \frac{1}{s}$:

$$\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+\frac{1}{s}} \doteqdot \int_0^t J_0\left(2\sqrt{\alpha(t-\alpha)}\right) d\alpha;$$

но

$$\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s+\frac{1}{s}}=\frac{1}{s^2+1}\doteqdot \sin t.$$

Таким образом, приходим к известному в теории бесселевых функций равенству

$$\int_0^t J_0\left(2\sqrt{\alpha(t-\alpha)}\right)d\alpha=\sin t.$$

Оригинал для функции $\frac{1}{s}\,\overline{f[\ln s]}$

Найдем изображение функции $F(t)=\int_0^\infty \frac{t^\alpha f(\alpha)\,d\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\doteqdot$ $\doteqdot\overline{F(s)}$, где $f(\alpha)$ — произвольный оригинал, а $\Gamma(\alpha+1)$ — Эйлерова функция второго рода: $\Gamma(\alpha+1)=$ $=\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha dx$. Используя интеграл Лапласа, находим

$$F(t)\doteqdot\overline{F(s)}=\int_0^\infty e^{-st}dt\int_0^\infty \frac{t^\alpha f(\alpha)\,d\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

В силу равномерной сходимости внутреннего интеграла по аргументу t, можно в правой части изменить порядок интегрирования:

$$\overline{F(s)}=\int_0^\infty \frac{f(\alpha)\,d\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^\infty e^{-st}t^\alpha\,dt.$$

Во внутреннем интеграле положим $st=v$, тогда

$$\int_0^\infty e^{-st}t^\alpha dt=\int_0^\infty e^{-v}\left(\frac{v}{s}\right)^\alpha \frac{dv}{s}=\frac{1}{s^{\alpha+1}}\int_0^\infty e^{-v}v^\alpha dv=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}.$$

В силу этого предыдущее равенство приводится к виду

$$\overline{F(s)}=\int_0^\infty \frac{f(\alpha)\,d\alpha}{s^{\alpha+1}}=\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-\alpha\ln s}f(\alpha)\,d\alpha=\frac{\overline{f(\ln s)}}{s},$$

где, как всегда, через $\overline{f(s)}$ обозначено изображение функции $f(t)$.

Итак, приходим к операционному соотношению

$$\frac{1}{s}\overline{f(\ln s)} \doteqdot \int_0^\infty \frac{t^\alpha f(\alpha)\,d\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}. \qquad (8;\ 3;\ 7)$$

§ 4. Преобразование, взаимное преобразованию Эфроса

Преобразование Эфроса (см. § 1 настоящей главы) является преобразованием, осуществляемым над изображением. Но в операционном исчислении все теоремы идут взаимными парами: если существует какая-либо теорема, касающаяся некоторой операции над оригиналом, то имеется и взаимная ей, относящаяся к аналогичной операции над изображением. Легко установить преобразование, взаимное в этом смысле с преобразованием Эфроса.

Пусть имеется оригинал $F(t)$ ($|F(t)|<Me^{\sigma_0 t}$ при $t>0$) и, кроме того, при $t>0$ задана некоторая положительная, непрерывная или кусочно-непрерывная функция

$q(t)$, порядок роста которой при $t \to +\infty$ не превосходит порядка роста некоторой линейной функции: при $t > N$, $q(t) \leqslant kt$ $(k > 0)$. Тогда функция $F(t)e^{\alpha q(t)}$ при произвольном комплексном параметре α с положительной вещественной частью $[\mathrm{Re}(\alpha) > 0]$ также будет оригиналом.

В самом деле, имеем при $t > N$:

$$\left|F(t)e^{\alpha q(t)}\right| = |F(t)|\, e^{\mathrm{Re}(\alpha)\, q(t)} <$$

$$< Me^{\sigma_0 t} \cdot e^{\mathrm{Re}(\alpha)\, kt} = Me^{\overset{*}{\sigma}_0 t},$$

где $\overset{*}{\sigma}_0 = \sigma_0 + k\,\mathrm{Re}(\alpha)$.

Обозначим изображение этой функции через $\overline{F(s, \alpha)}$:

$$\overline{F(s, \alpha)} = \int_0^\infty e^{-st+\alpha q(t)} F(t)\, dt. \qquad (8;\ 4;\ 1)$$

Пусть дан еще один оригинал $f(t) (|f|t)| < M_1 e^{\sigma_1 t}$ при $t > 0$, изображением которого является $\overline{f(s)}$, причем абсолютно сходится интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \overline{f(u)} \cdot \overline{F(s, u)}\, du,$$

в котором путь интегрирования — прямая $\mathrm{Re}(u) = \sigma > 0$ лежит в области регулярности изображения $\overline{f(u)}$: $\sigma > \sigma_1$. Тогда справедливо операционное соотношение

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \overline{f(u)}\, \overline{F(s, u)}\, du \doteqdot F(t)\, f[q(t)]. \quad (8;\ 4;\ 2)$$

Для доказательства в левой части соотношения (8; 4; 2) заменим $\overline{F(s, u)}$ ее значением по формуле (8; 4; 1):

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\overline{f(u)}\,\overline{F(s,u)}\,du=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\overline{f(u)}\,du\times$$

$$\times\int\limits_{0}^{\infty}e^{-st+uq(t)}F(t)\,dt.$$

В правой части, в силу равномерной сходимости внутреннего интеграла по параметру u (как интеграла Лапласа), можно изменить порядок интегрирования:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\overline{f(u)}\,\overline{F(s,u)}\,du=\int\limits_{0}^{\infty}e^{-st}F(t)\,dt\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{uq(t)}\overline{f(u)}\,du.$$

Но по формуле обращения, при $\mathrm{Re}(u)>\sigma_1$, имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{uq(t)}\overline{f(u)}\,du=f[q(t)]$$

[поскольку $q(t)\geqslant 0$], поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\overline{f(u)}\,\overline{F(s,u)}\,du=$$

$$=\int\limits_{0}^{\infty}e^{-st}F(t)\,f[q(t)]\,dt\doteqdot F(t)\,f[q(t)].$$

Таким образом, справедливость формулы (8; 4; 2) при перечисленных условиях доказана.

Пример. Найдем изображение функции

$$F(t,\alpha)=\frac{1}{\sqrt{t}}\,e^{\alpha\sqrt{t}},$$

где $\frac{1}{\sqrt{t}}$ — обобщенный оригинал; $q(t)=\sqrt{t}>0$ и при $t\geqslant 1$, $\sqrt{t}\leqslant t$.

Имеем

$$\frac{1}{\sqrt{t}}e^{\alpha\sqrt{t}} \doteq \int_0^\infty e^{-st+\alpha\sqrt{t}}\frac{dt}{\sqrt{t}}=e^{\frac{\alpha^2}{4s}}\int_0^\infty e^{-\left(\sqrt{st}-\frac{\alpha}{2\sqrt{s}}\right)^2}\frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

В последнем интеграле сделаем замену переменной, полагая

$$\sqrt{st}-\frac{\alpha}{2\sqrt{s}}=\frac{v}{\sqrt{2}},\quad \frac{dt}{\sqrt{t}}=\sqrt{\frac{2}{s}}\,dv:$$

$$\frac{1}{\sqrt{t}}e^{\alpha\sqrt{t}} \doteq \sqrt{\frac{2}{s}}\,e^{\frac{\alpha^2}{4s}}\int_{-\frac{\alpha}{\sqrt{2s}}}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}}dv=$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{s}}\,e^{\frac{\alpha^2}{4s}}\left\{1-\Phi\left(-\frac{\alpha}{\sqrt{2s}}\right)\right\}=\sqrt{\frac{\pi}{s}}\,e^{\frac{\alpha^2}{4s}}\left\{1+\Phi\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2s}}\right)\right\},$$

$\left(\text{где}\ \ \Phi(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}dx - \text{интеграл вероятностей}\right).$

Итак,

$$\frac{1}{\sqrt{t}}e^{\alpha\sqrt{t}} \doteq \sqrt{\frac{\pi}{s}}\,e^{\frac{\alpha^2}{4s}}\left\{1+\Phi\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2s}}\right)\right\}. \qquad (8;\ 4;\ 3)$$

Отсюда, в соответствии с преобразованием (8; 4; 2), исходя из соотношения $f(t)\doteq\overline{f(s)}$, приходим к соотно-

шению

$$\frac{1}{\sqrt{t}}f(\sqrt{t}) \doteqdot \frac{1}{2\pi i}\sqrt{\frac{\pi}{s}}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\frac{u^2}{4s}}\left\{1+\Phi\left(\frac{u}{\sqrt{2s}}\right)\right\}\overline{f(u)}\,du. \tag{8; 4; 4}$$

Функция $e^{\frac{u^2}{4s}}\left\{1+\Phi\left(\frac{u}{\sqrt{2s}}\right)\right\}$ стремится в левой полуплоскости плоскости u к нулю равномерно. В силу этого, если $\overline{f(u)}$ удовлетворяет условиям третьей теоремы разложения, для вычисления интеграла в правой части формулы (8; 4; 4) можно применить теорему вычетов. Учитывая при этом, что функция $e^{\frac{u^2}{4s}}\left\{1+\Phi\left(\frac{u}{\sqrt{2s}}\right)\right\}$ на плоскости u имеет единственную особую точку — существенную особенность на бесконечности, вместо формулы (8; 4; 4) придем к формуле

$$\frac{1}{\sqrt{t}}f(\sqrt{t}) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}\sum_{k=1}^{k=m} e^{\frac{\alpha_k^2}{4s}}\left\{1+\Phi\left(\frac{\alpha_k}{\sqrt{2s}}\right)\right\}\operatorname*{Res}_{s=\alpha_k}\overline{f(s)}, \tag{8; 4; 5}$$

где суммирование распространяется на все полюсы функции $\overline{f(s)}$. Применяя формулу (8; 4; 5) читатель может еще раз убедиться в справедливости формул (8; 2; 10) и (8; 2; 11) (следует лишь учесть, что функция $\Phi(t)$ — нечетная).

Справочная таблица формул операционного исчисления

№ п. п.	Оригинал	Изображение	Номер формулы
1	$f(t)$	$\overline{f(s)} = \int\limits_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$	(1; 2; 1) (интеграл Лапласа)
2	$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{st} \overline{f(s)}\,ds$	$\overline{f(s)}$	(1; 2; 2) (формула обращения)
3	$f^{(n)}(t)$	$s^n \overline{f(s)} - \sum\limits_{k=0}^{k=n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0)$	(2; 2; 2) (дифференцирование оригинала)
4	$\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s} \overline{f(s)}$	(2; 2; 3) (интегрирование оригинала)
5	$(-1)^n t^n f(t)$	$\frac{d^n}{ds^n} [\overline{f(s)}]$	(2; 2; 4) (дифференцирование изображения)
6	$\frac{f(t)}{t}$	$\int\limits_s^\infty \overline{f(q)}\,dq$	(2; 2; 5) (интегрирование изображения)

№ п. п.	Оригинал	Изображение	Номер формулы
7	$e^{\alpha t} f(t)$	$\overline{f(s-\alpha)}$	(2; 3; 1) (теорема смещения)
8	$f(t-\tau)$ $(\tau>0,\ \text{const})$	$e^{-\tau s}\,\overline{f(s)}$	(2; 3; 5) (теорема запаздывания)
9	$f(\alpha t)$ $(\alpha>0)$	$\frac{1}{\alpha}\,\overline{f\left(\frac{s}{\alpha}\right)}$	(2; 5; 1) (теорема подобия)
10	$\int\limits_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau$	$\overline{f_1(s)}\cdot\overline{f_2(s)}$	(2; 4; 3) (теорема свертывания оригиналов)
11	$f_1(t)\, f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\overline{f_1(s-p)}\,\overline{f_2(p)}\,dp$	(2; 4; 10) (теорема свертывания изображений)
12	$\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(t,\alpha)\, d\alpha$	$\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2}\overline{f(s,\alpha)}\,d\alpha$	(2; 6; 2) (интегрирование по параметру)

№ п. п.	Оригинал	Изображение	Номер формулы
13	$f'_{\alpha}(t, \alpha)$	$\frac{\partial}{\partial\alpha} \overline{f(s, \alpha)}$	(2; 6; 4) (дифференцирование по параметру)
14	$f(t) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)$	$\overline{f(s)} = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{f_n(s)}$	(2; 7; 2)
15	$u(t)$ (единичная функция)	$\frac{1}{s}$	(3; 1; 1)
16	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$	(3; 1; 2)
17	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$	(3; 1; 3)
18	$\frac{t^n}{n!} e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(s-\alpha)^{n+1}}$	(3; 1; 4)
19	$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$	(3; 1; 5)

№ п. п.	Оригинал	Изображение	Номер формулы
20	$\cos \beta t$	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$	(3; 1; 6)
21	$\operatorname{sh} \beta t$	$\frac{\beta}{s^2-\beta^2}$	(3; 1; 7)
22	$\operatorname{ch} \beta t$	$\frac{s}{s^2-\beta^2}$	(3; 1; 8)
23	$e^{\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$	(3; 1; 9)
24	$e^{\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$	(3; 1; 10)
25	$\frac{t^{(n)}}{n!} \sin \beta t$	$\frac{\widetilde{\text{Jm}}\,\{(s+\beta i)^{n+1}\}}{(s^2+\beta^2)^{n+1}}$	(3: 1; 11)
26	$\frac{t^n}{n!} \cos \beta t$	$\frac{\widetilde{\text{Re}}\,\{(s+\beta i)^{n+1}\}}{(s^2+\beta^2)^{n+1}}$	(3; 1; 12)
27	$\frac{t^n}{n!} e^{\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\widetilde{\text{Jm}}\,\{[(s-\alpha)+\beta i]^{n+1}\}}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^{n+1}}$	(3; 1; 13)

№ п. п.	Оригинал	Изображение	Номер формулы
28	$\frac{t^n}{n!} e^{\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{\widetilde{\mathrm{Re}}\,\{[(s-\alpha)+\beta i]^{n+1}\}}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^{n+1}}$	(3; 1; 14)
29	$\frac{t^\mu}{\Gamma(\mu+1)}\ (\mu > -1)$	$\frac{1}{s^{\mu+1}}$	(3; 2; 2)
30	$\frac{t^\mu \ln t}{\Gamma(\mu+1)}\ (\mu > -1)$	$\frac{1}{s^{\mu+1}}\left[\frac{\Gamma'(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)} - \ln s\right]$	(3; 2; 3)
31	$\ln t$	$-\frac{\ln s + \gamma}{s}$ ($\gamma = 0{,}5772157\ldots$ ... — постоянная Эйлера)	(3; 2; 4)
32	$\frac{t^\mu e^{\alpha t}}{\Gamma(\mu+1)}\ (\mu > -1)$	$\frac{1}{(s-\alpha)^{\mu+1}}$	(3; 2; 5)
33	$\frac{t^\mu e^{\alpha t} \ln t}{\Gamma(\mu+1)}\ (\mu > -1)$	$\frac{1}{(s-\alpha)^{\mu+1}}\left[\frac{\Gamma'(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)} - \ln(s-\alpha)\right]$	(3; 2; 6)

№ п. п.	Оригинал	Изображение	Номер формулы
34	$e^{\alpha t}\ln t$	$-\frac{\gamma+\ln(s-\alpha)}{s-\alpha}$	(3; 2; 7)
35	$\int\limits_0^t \frac{e^{\tau}-1}{\tau}\,d\tau$	$-\frac{1}{s}\ln\left(1-\frac{1}{s}\right)$	(3; 3; 1)
36	$\int\limits_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau$	$\frac{1}{s}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{s}$	(3; 3; 2)
37	$\Phi(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^t e^{-\frac{\tau^2}{2}}\,d\tau$	$\frac{1}{s}e^{\frac{s^2}{2}}\{1-\Phi(s)\}$	(3; 3; 5)
38	Периодический оригинал $f(t)$ [$f(t+l)=f(t)$ при $t>0$]	$\frac{\overline{f_0(s)}}{1-e^{-ls}}=\frac{\int\limits_0^l e^{-st}f(t)\,dt}{1-e^{-ls}}$	(3; 4; 3)

№ п. п.	Оригинал	Изображение	Номер формулы
39	Кусочно-аналитический оригинал $f(t)$ $[f(t) = f_k(t)$ при $\tau_k \leqslant t \leqslant \tau_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots, m; f_0(t) = f_{m+1}(t) \equiv 0]$	$\overline{f(s)} = \sum_{j=1}^{m+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta f^{(n)}(\tau_j)}{s^{n+1}} e^{-s\tau_j}$ $\left[\Delta f^{(n)}(\tau_j) = f_j^{(n)}(\tau_j) - f_{j-1}^{(n)}(\tau_j)\right]$	(3; 5; 9)
40	Полигональная функция $f(t)$ $[f(t) = a_k t + b_k$ при $\tau_k \leqslant t \leqslant \tau_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots, m$; $f_0(t) = f_{m+1}(t) \equiv 0]$.	$\overline{f(s)} = \sum_{k=1}^{m+1} \left\{ \frac{\delta_k}{s} + \frac{\alpha_k}{s^2} \right\} e^{-s\tau_k}$ $\{\delta_k = \Delta f(\tau_k)$ (приращение ординат), $\alpha_k = \Delta f'(\tau_k)$ (приращение угл. коэфф.)	(3; 6; 1)
41	Ступенчатая функция $f(t)$ $f(t) = h_k$ при $\tau_k \leqslant t \leqslant \tau_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots, m; h_0 = h_{m+1} = 0$.	$\overline{f(s)} = \sum_{k=1}^{m+1} \frac{\delta_k}{s} e^{-s\tau_k}$ $(\delta_k = h_k - h_{k-1})$	(3; 6; 3)

№ п. п.	Оригинал	Изображение	Номер формулы
42	$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ (ряд сходится на всей оси ot, $\lvert a_k \rvert \leqslant \frac{M\sigma_0^k}{k!}$),	$\overline{f(s)}=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{k!}{s^{k+1}}$	(3; 7; 4)
43	$J_0(t)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$	(3; 7; 5)
44	$J_0(2\sqrt{\alpha t})$	$\frac{1}{s} e^{-\frac{\alpha}{s}}$	(4; 1; 11)
45	Импульсная функция первого порядка $\delta(t)$	1	(6; 1; 7)
46	Импульсная функция второго порядка $\delta_1(t)$	s	(6; 2; 10)

№ п. п.	Оригинал	Изображение	Номер формулы
47	$F(t,\alpha)$ $\int\limits_0^\infty f(\alpha)\,F(t,\alpha)\,d\alpha$	$\overline{\varphi(s)}\,e^{-\alpha q(s)}$ $\overline{\varphi(s)}\;\overline{f[q(s)]}$	(8; 1; 2) (преобразование Эфроса)
48	$f(t^2)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4v^2}}\,\overline{f(v^2)}\,dv$	(8; 2; 3)
49	$\frac{1}{t}\,f\left(\frac{1}{t}\right)$	$\int\limits_0^\infty \overline{f(u)}\,J_0(2\sqrt{su})\,du$	(8; 2; 5)
50	$\int\limits_0^\infty f(\alpha)\,J_0(2\sqrt{\alpha t})\,d\alpha$	$\frac{1}{s}\,\overline{f\left(\frac{1}{s}\right)}$	(8; 1; 3)
51	$f(\sqrt{t})$	$-\sqrt{\frac{\pi}{s}}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\frac{u}{4s}}\times$ $\times\,\frac{\overline{f'(\sqrt{u})}}{\sqrt{u}}\,du$	(8; 2; 7)

№ п. п.	Оригинал	Изображение	Номер формулы
51а	$f(\sqrt{t})$	$-\sqrt{\frac{\pi}{s}}\sum \operatorname{Res}\left\{e^{\frac{u}{4s}}\times \frac{\overline{f'(\sqrt{u})}}{\sqrt{u}}\right\}$	(8; 2; 7*)
52	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^\infty f(\alpha)\, e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}\, d\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{s}}\,\overline{f(\sqrt{s})}$	(8; 3; 2)
52а	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\pi e^{-\alpha^2} f(2\alpha\sqrt{t})\, d\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{s}}\,\overline{f(\sqrt{s})}$	(8; 3; 2*)
53	$\int\limits_0^t f(\alpha)\, J_0\left(2\sqrt{\alpha(t-\alpha)}\right) d\alpha$	$\frac{1}{s}\,\overline{f\left(s+\frac{1}{s}\right)}$	(8; 3; 7)
54	$\int\limits_0^\infty \frac{t^\alpha\, f(\alpha)\, d\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$	$\frac{1}{s}\,\overline{f(\ln s)}$	(8; 3; 8)

№ п. п.	Оригинал	Изображение	Номер формулы
55	$\begin{cases} F(t)\, e^{\alpha q(t)} \\ F(t)\, f[q(t)] \end{cases}$ ($q(t) > 0$ при $t > 0$ $q(t) < kt$ при $t > N$)	$\overline{\varphi(s,\alpha)}$ $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \overline{f(u)}\, \overline{\varphi(s,u)}\, du$	(8; 4; 2) (преобразование, взаимное преобразованию Эфроса)
56	$\frac{1}{\sqrt{t}} f(\sqrt{t})$	$\frac{1}{2\pi i} \sqrt{\frac{\pi}{s}} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\frac{u^2}{4s}} \times$ $\times \left\{1 + \Phi\left[\frac{u}{\sqrt{2s}}\right]\right\} \overline{f(u)}\, du$	(8; 4; 4)
56a	$\frac{1}{\sqrt{t}} f(\sqrt{t})$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}} \sum\limits_{k=1}^{k=m} e^{\frac{\alpha_k^2}{4s}} \times$ $\times \left\{1 + \Phi\left(\frac{\alpha_k}{\sqrt{2s}}\right)\right\} \operatorname{Res}_{s=\alpha_k} \overline{f(s)}$ (α_k — особые точки $\overline{f(s)}$)	(8; 4; 5)

№ п. п.	Оригинал	Изображение	Номер формулы
57	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}$ $\left(-\frac{\pi}{4} \leqslant \arg \alpha < \frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\alpha\sqrt{s}}$	(8; 2; 1)
58	$\sin \alpha \sqrt{t}$	$\frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2s\sqrt{s}} e^{-\frac{\alpha^2}{4s}}$	(8; 2; 8)
59	$\operatorname{sh} \alpha \sqrt{t}$	$\frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2s\sqrt{s}} e^{\frac{\alpha^2}{4s}}$	(8; 2; 9)
60	$\frac{\cos \alpha \sqrt{t}}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}} e^{-\frac{\alpha^2}{4s}}$	(8; 2; 10)

№ п. п.	Оригинал	Изображение	Номер формулы
61	$\frac{\operatorname{ch} \alpha \sqrt{t}}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}\, e^{\frac{\alpha^2}{4s}}$	(8; 2; 11)
62	$e^t \{1 - \Phi[\sqrt{2t}]\}$	$\frac{1}{s + \sqrt{s}}$	(8; 3; 3)
63	$\Phi(\sqrt{2t})$	$\frac{1}{s\sqrt{s+1}}$	(8; 3; 4)
64	$1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{1}{s}\, e^{-\alpha\sqrt{s}}$	(8; 3; 5)
65	$\frac{1}{\sqrt{t}}\, e^{\alpha \sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}\, e^{\frac{\alpha^2}{4s}} \left\{1 + \Phi\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2s}}\right)\right\}$	(8; 4; 3)

Литература

Арамановин И. Г., Лунц Г. Л., Эльсгольц Л. Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М. «Наука», 1965, 1968.

Ван-дер-Поль Б., Бремер Х. Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа. М. ИЛ, 1952.

Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М. ГИФМЛ, 1960.

Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление. М , «Высшая школа», 1966.

Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М., «Высшая школа», 1965.

Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. СМБ. М., ГИФМЛ, 1961.

Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление по двум переменным и его приложения. М., Физматгиз, 1958.

Карслоу Х., Егер Д. Операционные методы в прикладной математике. М. ИЛ, 1948.

Конторович М. И. Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях. М. ГИФМЛ, 1953.

Краснов М. Л., Макаренко Г. И. Операционное исчисление, устойчивость движения (задачи и упражнения), М., «Наука», 1964.

Лурье А. И. Операционное исчисление М. — Л., ГИТТЛ, 1950.

Микусинский Я. Операторное исчисление, М., ИЛ, 1956.

Шелковников Ф. А., Такайшвили К. Г. Сборник упражнений по операционному исчислению, М., «Высшая школа», 1961, 1968.

Эфрос А. М., Данилевский А. М. Операционное исчисление и контурные интегралы, Харьков, ДНТВУ, 1937.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие 3
Введение 5
Некоторые понятия, формулы и теоремы математического анализа и теории функций комплексного переменного, используемые в операционном исчислении 5

§ 1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами; абсолютная сходимость; равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра 5
§ 2. Интегралы, зависящие от комплексного параметра 10
§ 3. Эйлеров интеграл второго рода — функция $\Gamma(z)$ . . 14
§ 4. Интеграл Фурье 16

Глава первая. Исходные положения операционного исчисления 24

§ 1. Преобразование интеграла Фурье 24
§ 2. Оригинал и изображение, связь между ними . . 27

Глава вторая. Основные теоремы операционного исчисления 42

§ 1. Линейные свойства преобразования Лапласа . . . 42
§ 2. Теоремы дифференцирования и интегрирования оригинала и изображения 43
§ 3. Теоремы смещения и запаздывания 48
§ 4. Теоремы свертывания 52
§ 5. Теорема подобия, теоремы о связи начальных и конечных значений оригинала и изображения . . . 59
§ 6. Дифференцирование и интегрирование операционных соотношений по параметру 63
§ 7. Переход к пределу в операционных соотношениях 65

Стр.

Глава третья. Изображения некоторых функций 69

§ 1. Изображения основных элементарных функций . . 69
§ 2. Расширение класса оригиналов. Изображение степенной функции (при произвольном показателе степени) и натурального логарифма **73**
§ 3. Применение основных теорем операционного исчисления к отысканию изображений некоторых неэлементарных функций 76
§ 4. Изображение периодического оригинала 80
§ 5. Изображение кусочно-аналитического оригинала . . 83
§ 6. Изображение полигональной функции 91
§ 7. Отыскание изображений при помощи рядов . . . 95
Упражнения 98

Глава четвертая. Методы отыскания оригинала по известному изображению; теоремы разложения 104

§ 1. Первая теорема разложения 104
§ 2. Вторая теорема разложения 109
§ 3. Третья теорема разложения (обобщенная) 114
§ 4. Применение теоремы свертывания оригиналов для отыскания оригинала по заданному изображению . . 120
Упражнения 123

Глава пятая. Интегрирование линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и систем таких уравнений методами операционного исчисления . . 126

§ 1. Интегрирование линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 126
§ 2. Интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 134
§ 3. Передаточная функция и ее оригинал. Интеграл Дюамеля 139
§ 4. Интегрирование уравнений, в правой части которых стоит кусочно-аналитическая функция 145
§ 5. Интегрирование уравнений, в правой части которых периодическая функция 150
§ 6. Физические задачи 153
Упражнения 166

Стр.

Глава шестая. Импульсные функции, их изображения и применение 175

§ 1. Импульсная функция первого порядка 175
§ 2. Импульсная функция второго порядка 179
§ 3. Применение импульсных функций 186
Упражнения 192

Глава седьмая. Применение операционного исчисления к вычислению несобственных интегралов и интегрированию некоторых классов дифференциальных и интегральных уравнений 194

§ 1. Вычисление несобственных интегралов 194
§ 2. Интегрирование одного класса линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами 202
§ 3. Интегрирование линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом 206
§ 4. Интегрирование линейных уравнений в частных производных 216
§ 5. Решение интегральных уравнений 231
Упражнения 233

Глава восьмая. Преобразование Эфроса и некоторые другие формулы операционного исчисления 239

§ 1. Преобразование Эфроса 239
§ 2. Изображения функций от аргументов t^2, $\sqrt{t}$ и $\frac{1}{t}$ 242
§ 3. Отыскание оригиналов функций от аргументов $\frac{1}{s}$, $\sqrt{s}$, $s+\frac{1}{s}$, $\ln s$ 252
§ 4. Преобразование, взаимное преобразованию Эфроса 258
Справочная таблица формул операционного исчисления . . . 263
Литература 276

Родион Яковлевич Шостак

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Редактор А. И. Селиверстова
Худож. редактор Т. А. Дурасова
Техн. редактор В. Г. Александрова
Корректор Г. А. Алымова

Сдано в набор 26/V—71 г. Подп. к печати 3/I—72 г.
Формат 70×108¹/₃₂. Объем 8,75 печ. л. 12,25 усл. п. л.
8,71 уч.-изд. л. Изд. № ФМ—474. Тираж 30.000 экз.
Цена 35 коп.
План выпуска литературы издательства
«Высшая школа» (вузы и техникумы на 1971 г.)
Позиция № 43.
Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14,
Издательство «Высшая школа»

Московская типография № 8 Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР,
Хохловский пер., 7. Зак. 3209.




35 коп.